

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND VI, HEFT 5 (SCHLUSSHEFT)

MIT 27 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 14. NOVEMBER 1952)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1952

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastel 5

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzellen mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Einzelzeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Einzelzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastel 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

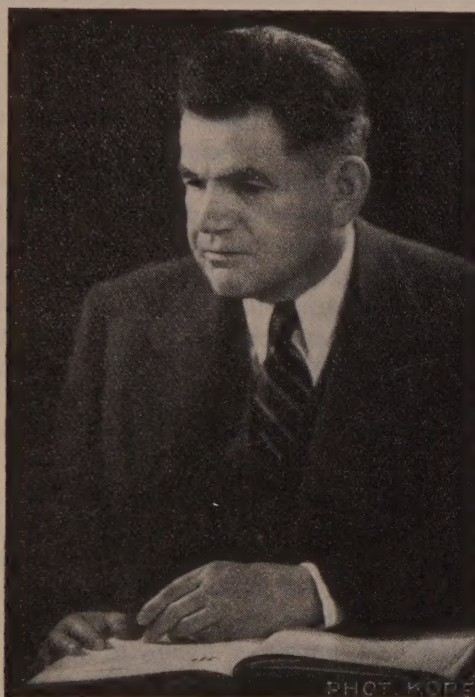
Band VI, Heft 5

Inhaltsverzeichnis

	Seite
P. Funk, Alfred Basch zum 70. Geburtstag	329
<i>Originalarbeiten</i>	
M. Z. E. Krzywoblocki, Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. A. Subsonic Flow	330
W. Glaser und H. Grumm, Die Aberrationskonstanten des elektronenoptischen Abbildungssysteme ohne Blende. (Mit 8 Textabbildungen.)	360
E. Czitary und G. Heinrich, Abwurfsicherheit des Trageiles auf einem Seilschuh. (Mit 3 Textabbildungen.)	372
F. Pochop, Zur Stabilität der langen, in gleichen Abständen querversteiften Rechteckplatte. (Mit 3 Textabbildungen.)	387
W. Müller, Zur Theorie der durchlaufenden Fundamentplatten und Pilzdecken mit rechteckigen Last- oder Stützflächen. (Mit 8 Textabbildungen.)	404
C. Torre, Hydrodynamische Theorie fester Stoffe. (Mit 4 Textabbildungen.)	417
<i>Buchbesprechungen</i>	428
Scientific Thought in the Twentieth Century (F. Kracmar). — Lohr, E., Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. 2. Aufl. (P. Funk). — Macmillan, R. H., An Introduction to the Theory of Control in Mechanical Engineering (F. Schulz). — Pöschl, Th., Lehrbuch der Technischen Mechanik. II. Band. 2. Aufl. (G. Heinrich). — Schmid, F. A. F., Verbrennungskraftmaschinen. 3. Aufl. (F. Lauer). — Schoklitsch, A., Handbuch des Wasserbaues. I. und II. Band. 2. Aufl. (E. Czitary).	

Alfred Basch zum 70. Geburtstag.

Hofrat Prof. Dr. Alfred Basch wurde am 9. Oktober 1882 als Sohn eines Rechtsanwaltes in Prag geboren. Er studierte an der Technischen Hochschule in Wien und legte im Jahre 1907 die II. Staatsprüfung aus dem Maschinenbaufache ab. In den Jahren 1907 bis 1911 war er an Mechanisch-Technischen Laboratorien der Technischen



Hochschule in Wien, der Deutschen Technischen Hochschule in Prag und der Technischen Hochschule in Dresden tätig. Seinen Prager Aufenthalt benützte er auch zum Besuch von mathematischen und physikalischen Vorlesungen und Übungen an der dortigen Deutschen Universität. Im Jahre 1910 wurde er an der Technischen Hochschule Wien auf Grund der bereits daselbst in Angriff genommenen Dissertation: „Über den Einfluß lokaler Inhomogenitäten, insbesondere starrer Einschlüsse auf den Spannungszustand in elastischen Körpern“ und des mit Auszeichnung bestandenen Rigorosums zum Doktor der technischen Wissenschaften promoviert. Im Jahre 1911 trat er in den Dienst der k. k. Normal-Eichungs-Kommission ein, die dann später in das Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen umgewandelt wurde. Er durchlief dort die verschiedenen Rangstufen und wurde schließlich im Jahre 1929 zum Obereichrat ernannt. Die Aufgaben, die er dort zu bewältigen hatte, waren durchaus verschiedener Art und boten ihm Anregung zu einer überaus regen und vielseitigen wissenschaftlichen Betätigung, die auch in zahlreichen Publikationen, die in

verschiedenen Fachzeitschriften, zum Teil in den Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, erschienen sind, ihren Niederschlag fand. Im ersten Weltkrieg kämpfte er als Reserveoffizier an der russischen und italienischen Front, wo er zweimal verwundet und mehrfach ausgezeichnet wurde. Gegen Kriegsende war er im Fliegerarsenal als Kommandant der Versuchsgruppe Aspern tätig. Vor Beginn des zweiten Weltkrieges wurde er unter dem nationalsozialistischen Regime aus dem Staatsdienst entlassen und sah sich genötigt, in die Vereinigten Staaten von Amerika auszuwandern. Er wirkte dort an verschiedenen Hochschulen: Holy Cross College, Harvard University, College of the City of New York, Rensselaer Polytechnic Institute, Amherst College, University of Massachusetts. Im August 1947 kehrte er nach Wien zurück, um einer Berufung an die nach dem Rücktritt seines Lehrers Franz Jung verwaiste II. Lehrkanzel für Allgemeine Mechanik an der Technischen Hochschule Wien zu folgen. Nachdem im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen im November 1947 seine offizielle Wiedereinsetzung in den Dienst und seine Ernennung zum „Wirklichen Hofrat“ erfolgt war, wurde er am 19. Mai 1948 zum Ordentlichen Professor der Allgemeinen Mechanik ernannt.

Baschs wissenschaftliches Schaffen zeigt eine außerordentliche Vielseitigkeit. Von ganz besonderem Interesse sind seine Arbeiten über die Theorie der Beobachtungsfehler, die ihm auch Gelegenheit boten, seine mathematische Begabung zu entfalten. Diese Arbeiten bildeten auch die Grundlage für seine Habilitation für praktische Mathematik. Abgesehen von Untersuchungen, die durch seine Tätigkeit im Bundesamt für Eich- und Vermessungswesen angeregt wurden, hat sich Basch auch mit mehreren Problemen der Technischen Mechanik, Elastizitätstheorie und Potentialtheorie beschäftigt, die in verschiedenen in- und ausländischen Zeitschriften veröffentlicht wurden. Dabei macht sich ein echt österreichischer Zug in seinem Schaffen bemerkbar, insofern, als er die Ergebnisse der Analysis mit klaren und anschaulichen geometrischen Vorstellungen zu verbinden wußte.

Vor allem drängt es uns aber, Basch nicht nur als Wissenschaftler zu würdigen, sondern auch bei diesem Anlaß zum Ausdruck zu bringen, wie ihn Kollegen und Schüler schätzen und verehren. Sein jugendliches Aussehen macht es uns herzlich schwer, zu glauben, daß er bereits 70 Jahre ist. Aber nicht nur äußerlich, sondern, was wir vor allem betonen wollen, Basch ist auch innerlich jung geblieben. Sein sonniges Wesen rührt davon her, daß er viel durch die Täler und Berge unseres Heimatlandes gewandert ist und die Schönheit der Natur voll und ganz auf sich einwirken ließ. Und so kommt es, daß er trotz des hohen Altersunterschiedes auch mit der Jugend zu empfinden versteht und ihr viel zu geben vermag. Dankbar empfinden auch seine Kollegen sein großes Interesse an dem Gedeihen und der Weiterentwicklung unserer Hochschule. Möge seine Schaffensfreude auch weiterhin voll und ganz zur Geltung kommen!

P. Funk, Wien.

Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow.

A. Subsonic Flow.

By M. Z. E. Krzywoblocki, University of Illinois.

Summary. In the first part of his work on Bergman's linear integral operator method the author discusses subsonic flow. After deriving the Chaplygin's equation the author thoroughly discusses the fundamentals of Bergman's method, the duality between the flows of an incompressible and a compressible fluid as well as the problem of the convergence of the series expansion. A brief representation of the simplified pressure-density relation according to von Mises' proposition closes this part.

Zusammenfassung. Im ersten Teil seiner Arbeit über die Bergmansche Methode der linearen Integraloperatoren untersucht der Verfasser den Fall der Unterschallströmung. Nach Ableitung der Tschapyginschen Gleichung werden die Grundlagen der Methode genau untersucht, sowie auch die Dualität, die zwischen der kompressiblen und der inkompressiblen Strömung besteht. Das Problem der Konvergenz der Reihenentwicklung wird ebenfalls erörtert. Den Abschluß dieses Teiles bildet eine kurze Darstellung der nach dem Vorschlag von v. Mises vereinfachten Druck-Dichte-Beziehung.

Résumé. Dans la première partie de son travail sur la méthode des opérateurs intégrales linéaires de Bergman, l'auteur discute l'écoulement subsonique. Après avoir dérivé l'équation de Tschaplygine, l'auteur discute profondément la méthode de Bergman, la dualité entre les écoulements compressibles et incompressibles, ainsi que le problème de la convergence des séries. Enfin, on donne une exposition brève de la relation entre la pression et la densité, simplifiée d'après une proposition de v. Mises.

Introduction.

The reader who is somewhat acquainted with the field of compressible fluid flow hears much about Stefan Bergman's method of integral operators. It took many years for him to develop this method which is based primarily on the theory of analytic functions and particularly on the theory of functions of two complex variables. The method, as a whole, is scattered throughout many papers in mathematical journals, and as a matter of fact, in its present state, is accessible only to those who are fully acquainted with mathematical literature. In one of their papers, Professors R. von Mises and M. Schiffer greatly simplified the method in the subsonic case. The purpose of the present work is to represent the method in all its variations in such a way that a theoretical engineer or an applied aerodynamicist can use it in practical applications. A professional mathematician will find the discussion too elementary for him. The parts of Bergman's presentation which are most interesting mathematically—the proofs—are mostly omitted in the present work. The emphasis was put upon the simplified representation of the final results and formulas, rather than upon the derivation of those formulas.

In the preliminary remarks the author discusses various types of singularities in a very elementary way.

The first two parts of the work deal with the subsonic case. In these sections the author followed mostly the paper of von Mises and Schiffer. Part III contains the supersonic flow, Part IV the transonic flow and Part V the axially symmetric flow. These sections are based on Bergman's original papers and form a condensation of several of his papers on the subject. Part VI describes singularities which play so important a rôle in all hodograph transformations. Part VII contains a review of other methods available in the theory of compressible fluid flow. The subsequent parts contain: Part VIII, a review of tables in Bergman's method; Part IX, concluding remarks; Part X, a list of tables; Part XI, examples; and Part XII, errata in previous papers.

Part 0.

Preliminary Remarks. Singularities.

1. General properties and remarks on analytic functions.

In this section, we shall remind the reader of some basic definitions and properties of analytic functions, singular points, etc. At first, let us repeat Cauchy's definition of an analytic function of a complex variable.

Let a two-dimensional region in the z -plane be given, where $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, and let u be a function of z defined uniquely at all points of the region. Let $z, z + \delta z$ be values of the variable z at two points, and $u, u + \delta u$, the corresponding values of u . Then, if at any point z within the area, $\delta u / \delta z$ tends to a limit when $\delta x \rightarrow 0, \delta y \rightarrow 0$, independently (where $\delta z = \delta x + i \delta y$), i. e., if the limit is independent of the path by which the point $z + \delta z$ tends toward coincidence with z , u is said to

be a function of z which is monogenic or analytic at the point (the words regular and holomorphic are sometimes used). If the function is analytic and one-valued at all points of the region, we say that the function is analytic throughout the region. For almost every one of the elementary functions, however, there will be certain points z at which this property will cease to hold good. Thus, it does not hold for the function $f(z) = 1/(z - a)$ at the point $z = a$, since in this case

$$\lim_{h \rightarrow 0} 1/h \{f(z + h) - f(z)\} = \lim_{h \rightarrow 0} 1/h \{(z - a + h)^{-1} - (z - a)^{-1}\}, \quad (0.1.1)$$

does not exist when $z = a$. Similarly, it does not hold for the function $\log z$ and $z^{1/2}$ at the point $z = 0$. These exceptional points are called singular points, or singularities, of the function $f(z)$ under consideration.

Let x and y be two real functions of a real variable t which are continuous for every value of t such that $a \leq t \leq b$. We denote the dependence of x and y on t by writing

$$x = x(t), \quad y = y(t); \quad (a \leq t \leq b). \quad (0.1.2)$$

The functions $x(t)$, $y(t)$ are supposed to be such that they do not assume the same pair of values for any two different values of t in the range $a < t < b$. Then the set of points with coordinates (x, y) corresponding to these values of t is called a simple curve. If

$$x(a) = x(b), \quad y(a) = y(b), \quad (0.1.3)$$

the simple curve is said to be closed.

A two-dimensional continuum is a set of points in a plane possessing, among others, the property that any two points of the set can be joined by a simple curve consisting entirely of points of the set. A simple closed curve divides the plane into two continua (the "interior" and the "exterior"). A continuum formed by the interior of a simple curve is sometimes called an open two-dimensional region, and the curve is called its boundary; such a continuum with its boundary is then called a closed two-dimensional region, or, briefly, a closed region or domain. A simple closed curve C in the plane of the variable z is sometimes called a closed one-dimensional region, or a contour; a simple curve with its end-points omitted is then called an open one-dimensional region.

Cauchy's theorem on the integral of a function around a contour may be stated as follows: If $f(z)$ is a function of z , analytic at all points on and inside a contour C , then

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (0.1.4)$$

Another important theorem on the value of a function is the following one: The value of a function $f(z)$ (which is analytic on and inside C) at any point " a " within a contour C , may be expressed in terms of an integral which depends only on the value of $f(z)$ at points on the contour itself:

$$f(a) = (2\pi i)^{-1} \oint_C (z - a)^{-1} f(z) dz. \quad (0.1.5)$$

Laurent's theorem can be expressed in the following form: If $f(z)$ is analytic on the concentric circles C and C' of center a , and throughout the annulus between them, then at any point z of the annulus, $f(z)$ can be expanded in the form

$$f(z) = a_0 + a_1(z - a) + a_2(z - a)^2 + \dots + b_1(z - a)^{-1} + b_2(z - a)^{-2} + \dots, \quad (0.1.6)$$

where

$$a_n = (2\pi i)^{-1} \oint_C (t - a)^{-(n+1)} f(t) dt, \quad (0.1.6a)$$

$$b_n = (2\pi i)^{-1} \oint_{C'} (t - a)^{n-1} f(t) dt. \quad (0.1.6b)$$

An important case of Laurent's theorem arises when there is only one singularity within the inner circle C' , namely at the center a . In this case, the circle C' can

be taken as small as we please, and thus Laurent's expansion is valid for all points in the interior of the circle C , except the center a .

Consider a function $f(z)$ which is analytic throughout a closed region S , except at a single point a inside the region. Let it be possible to define a function $\Phi(z)$ such that

I. $\Phi(z)$ is analytic throughout S ,

II. when $z \neq a$, $f(z) = \Phi(z) + B_1(z-a)^{-1} + B_2(z-a)^{-2} + \dots + B_n(z-a)^{-n}$.

Then $f(z)$ is said to have a pole of order n at a ; and the terms $\sum_{i=1}^n B_i(z-a)^{-i}$ are called the principal part of $f(z)$ near a . By the definition of a singularity, a pole is a singularity. If $n = 1$, the singularity is called a simple pole.

Any singularity of a one-valued function other than a pole is called an essential singularity. If the essential singularity, a , is isolated (i. e., if the region, of which a is an interior point, can be found containing no singularities other than a), then a Laurent expansion can be found, in ascending and descending powers of $(z-a)$. Hence, the "principal part" of a function near an isolated essential singularity consists of an infinite series.

It should be noted that a pole is, by definition, an isolated singularity, so that all singularities which are not isolated are essential singularities.

The behavior of a function $f(z)$ as $|z| \rightarrow \infty$, can be treated in a similar way to its behavior as z tends to a finite limit. If we write $z = 1/z'$, so that the large values of z are represented by small values of z' in the z' -plane, there is a one-to-one correspondence between z and z' , provided that neither is zero; and to make the correspondence complete, it is sometimes convenient to say that when z' is the origin, z is the point at infinity. But the reader must be careful to observe that this is not a definite point, and any proposition about it is really a proposition concerning the point $z' = 0$.

Let $f(z) = \Phi(z')$. Then $\Phi(z')$ is not defined at $z' = 0$, but its behavior near $z' = 0$ is determined by its Taylor (or Laurent) expansion in powers of z' ; and we define $\Phi(0)$ as $\lim_{z' \rightarrow 0} \Phi(z')$ if that limit exists. For instance, the function $\Phi(z')$ may have a zero of order m at the point $z' = 0$; in this case, the Taylor expansion of $\Phi(z')$ will be of the form

$$\Phi(z') = A z'^m + B z'^{m+1} + C z'^{m+2} + \dots, \quad (0.1.7)$$

and so the expansion of $f(z)$ valid for sufficiently large values of $|z|$ will be of the form

$$f(z) = A z^{-m} + B z^{-m-1} + C z^{-m-2} + \dots \quad (0.1.8)$$

In this case, $f(z)$ is said to have a zero of order m at infinity.

Again, the function $\Phi(z')$ may have a pole of order m at the point $z' = 0$; in this case,

$$\Phi(z') = A/z'^m + B/z'^{m-1} + C/z'^{m-2} + \dots + L/z' + M + N z' + P z'^2 + \dots; \quad (0.1.9)$$

and so, for sufficiently large values of $|z|$, $f(z)$ can be expanded in the form

$$f(z) = A z^m + B z^{m-1} + C z^{m-2} + \dots + L z + M + N/z + P/z^2 + \dots \quad (0.1.10)$$

In this case, $f(z)$ is said to have a pole of order m at infinity.

Similarly, $f(z)$ is said to have an essential singularity at infinity, if $\Phi(z')$ has an essential singularity at the point $z' = 0$. Thus, the function $\exp z$ has an essential singularity at infinity, since the function $\exp(1/z')$ or

$$1 + 1/z' + 1/(2! z'^2) + 1/(3! z'^3) + \dots \quad (0.1.11)$$

has an essential singularity at $z' = 0$.

In all the previous considerations, the functions have had a unique value (or limit) corresponding to each value (other than singularities) of z . But functions may be defined which have more than one value for each value of z ; thus $z^{1/2}$ has two values, and the function $\arctan x$ (x real) has an unlimited number of values, viz. $n\pi + \arctan x$, where $-\frac{1}{2}\pi < \arctan x < \frac{1}{2}\pi$ and n is any integer; further examples of many-valued functions are $\log z$, $z^{-5/3}$, $\sin(z^{1/2})$. This is easy to understand if we recall that $z = r \exp(i\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)] = r \exp[i(\theta + 2n\pi)]$. Thus, $\log z = \log r + i(\theta + 2n\pi)$, which is a many-valued function, depending upon the value of the integer n .

Either of the functions which $z^{1/2}$ represents is, however, analytic except at $z = 0$, and we can apply to them the theorems of this section; the two functions are called "branches" of the many-valued function $z^{1/2}$. There will be certain points in general at which two or more branches coincide or at which one branch has an infinite limit; these points are called "branch-points". Thus, $z^{1/2}$ has a branch-point at 0; and, if we consider the change in $z^{1/2}$ as $z = r e^{i\theta}$ describes a circle counterclockwise around 0, we see that θ increases by 2π , r remains unchanged, and either branch of the function passes over into the other branch. This will be found to be a general characteristic of branch-points. Thus, we cannot apply Cauchy's theorem to such a function as $z^{3/2}$ when the path of integration is a circle surrounding the origin; but it is permissible to apply it to one of the branches of $z^{3/2}$ under special conditions (for more details, the reader may refer to¹).

Geometrically, a many-valued function represents the so-called "Riemann surface". Each branch of a many-valued function represents geometrically a branch or a sheet of the Riemann surface. Seemingly, all the sheets of a Riemann surface lie in one and the same plane. Actually, they are separate geometric elements, connected together only by means of branch points or other singular points.

An extension of the theorem of (0.1.5) is represented by the theorem of residues. If the function $f(z)$ has a pole of order m at $z = a$, then, by the definition of a pole, an equation of the form

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \Phi(z), \quad (0.1.12)$$

where $\Phi(z)$ is analytic near and at a , is true near a . The coefficient a_{-1} in this expansion is called the residue of the function $f(z)$ relative to the pole a . Now let C be any contour, containing in the region interior to it a number of poles a, b, c, \dots , of a function $f(z)$, with residues $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots$, respectively; and suppose that the function $f(z)$ is analytic throughout C and its interior, except at these poles. Then the theorem of residues states that: If $f(z)$ be analytic throughout a contour C and its interior except at a number of poles inside the contour, then

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum R, \quad (0.1.13)$$

where $\sum R$ denotes the sum of the residues of the function $f(z)$ at those of its poles which are situated within the contour C .

Let us note that if a is a simple pole of $f(z)$, the residue of $f(z)$ at that pole is $\lim_{z \rightarrow a} \{(z-a)f(z)\}$.

We shall briefly mention the singularities of linear differential equations. The standard form of a linear ordinary differential equation of the second order will be taken to be

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z)u = 0, \quad (0.1.14)$$

¹ E. Whittaker and G. N. Watson: A course of modern analysis. Cambridge: University Press.

and it will be assumed that there is a domain S in which both $p(z)$ and $q(z)$ are analytic except at a finite number of poles. Any point of S at which $p(z)$, $q(z)$ are both analytic will be called an ordinary point of the equation; other points of S will be called singular points. The property that the solution of a linear differential equation is analytic except at singularities of the coefficients of the equation is common to linear equations of all orders.

When two particular solutions of an equation of the second order are not constant multiples of each other, they are said to form a fundamental system.

Suppose that a point c of S is such that, although $p(z)$ or $q(z)$ or both have poles at c , the poles are of such order that $(z - c)p(z)$, $(z - c)^2 q(z)$ are analytic at c . Such a point is called a regular point for the differential equation. Any poles of $p(z)$ or of $q(z)$ which are not of this nature are called irregular points.

One may distinguish a few basic singular points: branch points (double or multiple), cusps of the first order, if both branches have the same tangents at the vortex, or of the second order, if both branches have different tangents, isolated points, end points, corner points (discontinuous first derivatives), etc.

A domain is called simply-connected if it is bounded by one curve. If a domain is bounded by more than one curve we call it a multiply-connected domain.

To illustrate better the nature of some singularities, let us discuss a few particular singular points. Let us note that the general character of the solutions in the hodograph plane can be easily examined by investigating the behavior of the transition function for an incompressible fluid. To begin with the simplest case first, consider for illustrative purposes a steady, irrotational flow in an infinite, simply-connected domain D bounded by a curve C in the z -plane ($z = x + iy$), with a parallel flow at infinity. At every point z of D there is one and only one velocity

vector \vec{q} . Assume that the z -plane is mapped onto a hodograph w -plane, where $w = u - iv$. If the curve C is mapped into \underline{C} and the flow at infinity corresponds to a point \underline{P} on the real axis of the w -plane within \underline{C} , then the domain D is mapped onto \underline{D} by a mapping function

$$w = w(z), \quad (0.1.15)$$

where $w(z)$ is an analytic function of z . The inverse function

$$z = z_0(w), \quad (0.1.16)$$

will set up a continuous one-to-one correspondence between the w - and z -planes, provided the mapping is conformal. As one may easily verify by means of the fundamentals of analysis, this requires that $w(z)$ is analytic and simple within D and $w'(z) \neq 0$. However, for most problems these conditions cannot be satisfied throughout the field of flow. In the first place, the function $w(z)$ is generally non-simple. For example, in the case of a uniform flow, $w(z)$ is constant, i. e., $w(z) = \text{constant}$, thus $w'(z) = 0$, and the whole z -plane corresponds to a point in the w -plane. Furthermore, the complex velocity for a two-dimensional problem generally can be put in the following form

$$w = w_\infty + w^*(z), \quad (0.1.17)$$

where w_∞ is a constant. Since w_∞ represents the flow at infinity, the boundary conditions at infinity require that $w^*(z) = 0$, as z tends to infinity. As a consequence $w^{*'}(z) = 0$, as z tends to infinity. Therefore, in all cases, the point \underline{P} in the w -plane, is a singular point. It is a branch-point at w_∞ if $z_0(w)$ is many-valued; or a pole, if otherwise.

In practice, there are two kinds of singularities that play a dominant rôle in the problem of a two-dimensional flow. These singularities will presently be discussed briefly.

The function $z_0(w)$ is said to have a branch-point of order k at $w = w_\infty$, if its inverse $w(z)$ contains the part w^* which has a zero of order $(k + 1)$ at $z = \infty$. One of the most important singular points in two-dimensional flow problems is the branch-point of order 1. As is known, when a closed body is present in a uniform flow, there always exist two stagnation points S_1 and S_2 , both of which correspond to the origin of the w -plane, since both the velocity components, u and v , at those points are equal to zero. If a streamline PS is followed, for instance, from $+\infty$ to S_1 hence along the surface of the body, and then from S_2 to $-\infty$, a curve \underline{PS} in the w -plane would be described twice. This indicates that the function $z_0(w)$ possesses two branches of Riemann surface joining together about the branch point \underline{P} . In order to make the domain \underline{D} single-valued, a cut is put along the real axis from the branch point to $+\infty$. Then one portion of the z -plane is mapped onto a definite branch of the Riemann surface in the w -plane, and this will be defined as the domain D . If the body is symmetrical with respect to the coordinate axes with parallel flow at infinity, then the domain D , containing the points z which possess the negative imaginary part, i. e., $\text{Im}\{z\} < 0$, will be mapped conformally into \underline{D} on one branch of the Riemann surface and the points z with $\text{Im}\{z\} > 0$ on the other (Im denotes the imaginary part).

Another singularity of importance is the logarithmic singularity. Let us consider the flow over a wavy surface, placed parallel to a uniform stream. Such a flow has a periodic nature. For such flows there are infinitely many points in the physical plane that have the same velocity. Hence, there is an infinite number of branches in the w -plane, each of which corresponds to a definite portion of the z -plane. The function $z_0(w)$ must have a term of the form $\ln(1 - \frac{w}{U})$ and the point \underline{P} now is a logarithmic singularity. If, however, a proper cut is introduced from the singular point to $+\infty$, then the domain \underline{D} is again made single-valued.

Generally, a function in the hodograph plane may have more than one singularity. There may exist other singularities than the one at $w = w_\infty$. However, such singularities usually lie outside the region of interest and thus need not be investigated. Often those other singularities correspond to points inside the body. Of course, only the flow outside the body is of interest.

The author believes that the reader is acquainted with such common types of flow as source (or sink), doublet and vortex. In a source (or sink) the streamlines coincide with the radii, and the flow conditions on all the streamlines are identical. The mass of fluid per unit time, flowing out from (or into) the center of the source (or sink), is called the strength of the source (or sink). A doublet is constructed from a source and sink of equal strength, located on an axis (called axis of the doublet), after the distance between the centers of those two elements shrinks to zero, so that both centers coincide. The streamlines are circles, each passing through the center of the doublet and being tangent to the axis of the doublet. The centers of all the streamlines are located on the line perpendicular to the axis of the doublet. The streamlines of a vortex are concentric circles. It is quite obvious that a representation of all those elements (sink, doublet, vortex) in the hodograph plane is connected with singularities of various kinds, and that the passage from the hodograph into the physical plane cannot be achieved by a one-to-one correspondence. This is caused by the fact that in a source, say, the velocity distribution along each streamline (radius) is the same. Thus in the hodograph plane all the streamlines (radii) are represented by one and the same curve (hodograph).

The expressions "in the small" and "in the large", used in the present work, refer, as is known, to infinitesimal and finite regions, respectively.

Part 1.

General Theory of Subsonic Flow.

1. Physical and hodograph planes, system of equations, Chaplygin's equation.

The law of conservation of matter and the condition of irrotationality lead to two well-known equations

$$(\varrho u)_x + (\varrho v)_y = 0, \quad u_y - v_x = 0, \quad (1.1.1)$$

where the known notations are used and subscripts denote partial differentiation. These equations are satisfied if the notions of a potential Φ and a stream-function Ψ are introduced such that

$$u = \Phi_x = \varrho^{-1} \Psi_y, \quad v = \Phi_y = -\varrho^{-1} \Psi_x. \quad (1.1.2)$$

For illustrative purposes we take an isentropic flow for which the relation $p = c \varrho^k$ holds. By combining that relation with the Bernoulli equation $q^2/2 + \int \varrho^{-1} dp = \text{const.}$, we obtain the result [with $\int \varrho^{-1} dp = k(k-1)^{-1} p \varrho^{-1}$]:

$$\varrho = [\varrho_0^{(k-1)} - (k-1)(kc)^{-1} q^2/2]^{1/(k-1)}, \quad (1.1.3)$$

where ϱ_0 denotes the density at a stagnation point (at rest). Thus the density is a function of $q^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2$, and the equations (1.1.2) and (1.1.3) represent a system of three non-linear partial differential equations for Φ , Ψ and ϱ . An important simplification in the study of the motion of such a fluid has been achieved by Molenbroeck² and Chaplygin³. That is, by means of transformation from the (x, y) -plane (physical plane) onto the (q, θ) -plane (hodograph plane) we obtain a system of linear equations. The symbol θ denotes the angle between the direction of the resultant velocity q and the horizontal axis. If Φ and Ψ are considered as functions of q and θ instead of x and y , they satisfy the system

$$\Phi_\theta = q \varrho^{-1} \Psi_q, \quad \Phi_q = -(1 - M^2)(\varrho q)^{-1} \Psi_\theta, \quad (1.1.4)$$

where M is the Mach number q/a , and $a = (dp/d\varrho)^{1/2}$ is the local sound velocity. Consider both M and ϱ to be given functions of q . Then equations (1.1.4) are linear. Differentiating the first equation (1.1.4) with respect to q and the second one with respect to θ and comparing, results in the well-known equation of Chaplygin, which is a linear one:

$$\Psi_q + \varrho q (1 - M^2)^{-1} (q \varrho^{-1} \Psi_{\theta\theta})_q = 0. \quad (1.1.5)$$

2. Transformation of Chaplygin's equation, pseudo-logarithmic plane.

For subsonic flow let us replace q by a new, dimensionless variable λ , which is defined by⁴

$$\frac{d\lambda}{dq} = (1 - M^2)^{1/2} q^{-1} = (q^{-2} - a^{-2})^{1/2}, \quad (1.2.1)$$

with $\lambda = 0$ for $q = a$, i. e., for $M = 1$, or

$$\lambda = -\int_a^q [1 - M^2(x)]^{1/2} x^{-1} dx. \quad (1.2.1')$$

While q goes from zero to a , the variable λ varies from $-\infty$ to 0. From (1.2.1) we may express the derivative Ψ_q in terms of Ψ_λ , that is, $\Psi_q = (1 - M^2)^{1/2} q^{-1} \Psi_\lambda$, and

² P. Molenbroeck: Über einige Bewegungen eines Gases mit Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. Arch. Math. Physik (2) 9, 157—195 (1890).

³ S. A. Chaplygin: On gas jets. Scientific Memoirs, Moscow University, Phys.-Math. Section 21, 1—127 (1904), or N. A. C. A., T. M. No. 1063 (1944).

⁴ R. von Mises and M. Schiffer: On Bergman's integration method in two-dimensional compressible fluid flow. Advances in Applied Mechanics, Vol. I. New York: Academic Press Inc. 1948.

by introducing the quantity $l^{1/2} = (1 - M)^{1/2} \varrho^{-1}$, we easily obtain the equality $q \varrho^{-1} \Psi_q = l^{1/2} \Psi_\lambda$, and the relation

$$(q \varrho^{-1} \Psi_q)_q = (1 - M^2)^{1/2} q^{-1} (l^{1/2} \Psi_\lambda)_\lambda. \quad (1.2.2)$$

Introducing (1.2.2) into (1.1.5), Chaplygin's equation becomes:

$$s^{1/2} \Psi_{\theta\theta} + s^{-1/2} (s \Psi_\lambda)_\lambda = 0, \quad s = l^{1/2}. \quad (1.2.3)$$

In (1.2.3) we replace Ψ by $\Psi^* = s^{1/2} \Psi$ and calculate $(s \Psi_\lambda)_\lambda = s^{1/2} \Psi^*_{\lambda\lambda} - \Psi^* \frac{d^2}{d\lambda^2} (s^{1/2})$.

Equation (1.2.3) takes the form:

$$\Delta \Psi^* + f(\lambda) \Psi^* = 0, \quad (1.2.4)$$

where the symbol Δ denotes the Laplacian, i. e., $\Delta = \partial^2/\partial\lambda^2 + \partial^2/\partial\theta^2$, and the dimensionless function $f(\lambda)$,

$$f(\lambda) = -s^{-1/2} \frac{d^2}{d\lambda^2} (s^{1/2}) = -[s' (2s)^{-1}]^2 - \frac{d}{d\lambda} [s' (2s)^{-1}], \quad (1.2.5)$$

depends on λ only. In (1.2.5) the symbol s' denotes the derivative of s with respect to λ . Each function $\Psi^* = \Psi^*(\lambda, \theta)$ that satisfies the partial differential equation (1.2.4) defines a stream-function $\Psi = s^{-1/2} \Psi^*$. The plane (λ, θ) is called the pseudo-logarithmic plane (see section I.4).

3. Isentropic flow.

The transformation of Chaplygin's equation, as presented so far, applies to any fluid for which both M and ϱ are certain functions of q only and for which a definite relation between pressure and density holds. Let us specify this relation now, by assuming the isentropic conditions. As it is known, for such a flow the relation $a^2 = k p \varrho^{-1} = k c \varrho^{k-1}$ holds. Using that relation we obtain from (1.1.3) the formula

$$\frac{1}{2} (k-1) q^2 + a^2 = a_0^2, \quad \text{or} \quad q^2 \left[1 + \frac{1}{2} (k-1) m \right] = m a_0^2, \quad (1.3.1)$$

where $m = M^2 = q^2 a^{-2}$. Differentiating the second equation (1.3.1) with respect to m we get the relation

$$\frac{d}{dm} (q^2) = q^4 (a_0 m)^{-2}. \quad (1.3.2)$$

From the equation for the sound velocity we have the relation

$$(k-1) \log \varrho = \log (a^2) + \text{const.}, \quad (1.3.3)$$

which, differentiated with respect to m , leads to:

$$\frac{d}{dm} (\log \varrho) = -\frac{1}{2} q^2 m^{-1} a_0^{-2}. \quad (1.3.4)$$

In the derivation of equation (1.3.4) the first formula (1.3.1) and formula (1.3.2) were used. In (1.2.5) we apply the substitution $s' (2s)^{-1} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} (\log s) = n$, and obtain

$$f = -n^2 - \frac{dn}{d\lambda}. \quad (1.3.5)$$

By taking the logarithm of s (section I.2) we obtain the relation

$$\log s = \frac{1}{2} \log (1 - m) - \log \varrho, \quad (1.3.6)$$

from which we get, after some elementary transformations by means of the second equation (1.3.1) and (1.3.4),

$$\frac{d}{dm} (\log s) = -\frac{1}{4} (k+1) (1-m)^{-1} q^2 a_0^{-2}. \quad (1.3.7)$$

From the definition of λ given in (1.2.1), it follows that

$$\frac{d\lambda}{d(q^2)} = (1-m)^{1/2} (2q^2)^{-1}, \quad (1.3.8)$$

and thus, using (1.3.2), (1.3.7) and (1.3.8) we obtain after some elementary calculations:

$$n = \frac{d}{2d\lambda} (\log s) = -\frac{1}{4} (k+1) m^2 (1-m)^{-3/2}. \quad (1.3.9)$$

By differentiating, using the second equation (1.3.1) and equations (1.3.2) and (1.3.8), we obtain

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{1}{4} (k+1) m^2 (1-m)^{-3} \left[4 - (3-2k)m - \frac{1}{2} (k-1) m^2 \right]. \quad (1.3.10)$$

Then, by substituting (1.3.10) and the square of the right-hand side of (1.3.9) into (1.3.5), we obtain the function f in terms of m :

$$f = \frac{1}{16} (k+1) m^2 (1-m)^{-3} [16 - 4(3-2k)m - (3k-1)m^2]. \quad (1.3.11)$$

To obtain the relation between λ and m , we multiply the right-hand sides of (1.3.2) and (1.3.8), and by considering the second equation (1.3.1),

$$\frac{d\lambda}{dm} = \frac{1}{2} (1-m)^{1/2} \left[m^{-1} + \frac{1}{2} (k-1) \right]^{-1} m^{-2}. \quad (1.3.12)$$

Therefore, by integrating,

$$\lambda = \frac{1}{2} \{ \log(1-T) - \log(1+T) + h^{-1} [\log(1+hT) - \log(1-hT)] \}, \quad (1.3.13)$$

$$T^2 = 1-m, \quad h = (k-1)^{1/2} (k+1)^{-1/2}. \quad (1.3.13a)$$

Using the substitutions $(1+T) = m(1-T)^{-1}$, $(1-T) = 1 - (1-m)^{1/2}$, $(1+hT) = (1-hT)^{-1} [2(k+1)^{-1} + h^2 m]$, etc., we obtain from (1.3.13) formula (11') in ⁴, p. 254.

Combining (1.3.11) and (1.3.13a) we easily obtain another formula for $f(\lambda)$:

$$f = \frac{1}{16} (k+1) [5(1+k)T^{-6} - 12kT^{-4} + 2(3k-7)T^{-2} + 4(2+k) - (3k-1)T^2], \quad (1.3.14)$$

or

$$f = \frac{1}{16} (k+1) (1-T^2)^2 T^{-6} [5(k+1) + 2(5-k)T^2 - (3k-1)T^4]. \quad (1.3.14a)$$

The relations (1.3.11) and (1.3.13) between f , λ and m do not involve any integration constants, since f , λ and m are dimensionless.

4. The duality between the flows of an incompressible and a compressible fluid. Logarithmic plane.

In considering the two-dimensional flows of a perfect fluid, it is convenient to introduce a certain correspondence between subsonic flows of a compressible fluid and flows of an incompressible fluid. Naturally, such a correspondence can be defined in various ways. On the other hand, one can formulate certain requirements which will simplify the forms of this correspondence. First, it is convenient to consider the flows in a plane where Φ and Ψ satisfy a linear homogeneous equation, since in this case the principle of superposition holds. Second, it is natural to require that the equations for Φ and Ψ have the simplest form possible, which for linear equations is the so-called "canonical form". In the case of a compressible fluid, these conditions lead to considering the potential and the stream-function in the pseudo-logarithmic plane, where both requirements are fulfilled. In the case of an incompressible fluid, Φ and Ψ satisfy in various planes (that is, in the physical, hodograph, etc.) the same equation, namely, the Laplace equation. Since, however, we consider the compressible fluid motion in the pseudo-logarithmic plane, it is natural to introduce the correspondence with incompressible fluid flows defined in the logarithmic plane. In the latter case the equations for Φ and Ψ have the "canonical form" (as may be easily

verified), and the transition from the pseudo-logarithmic plane to the logarithmic plane means only one-dimensional stretching: Thus one of the coordinates, θ , is the same, and for the second coordinate we take in the case of the incompressible fluid $\tilde{\lambda} = \log q$, and in the case of the compressible fluid the quantity λ , defined by (1.3.13), which reduces to $\log q$ as the compressibility effect goes to zero. The plane $(\tilde{\lambda}, \theta)$ is the so-called logarithmic plane. This duality between the flow of an incompressible and a compressible fluid may also be extended to the considerations covering the methods of integration of the partial differential equations of flows of those two types of fluid. Let us consider partial differential equation (1.2.4). The corresponding equation in the case of an incompressible fluid evidently must have the form $\Delta \Psi^* = 0$, i. e. Laplace's form. Chaplygin had already determined an infinity of solutions of equation (1.2.4) by the simple procedure of separating the variables: Thus, every solution Ψ^* of (1.2.4) which is regular in a given domain (see section 0.1) of the (λ, θ) -plane may be approximated uniformly in each closed subdomain (see section 0.1) by a series

$$\Psi_N^*(\lambda, \theta) = \sum_{n=1}^N (a_n C_n + b_n S_n), \quad (1.4.1)$$

to an arbitrary degree of precision. The symbols a_n and b_n denote the constant coefficients and C_n and S_n denote a set of solutions

$$C_n(\lambda, \theta) = \alpha_n(\lambda) \cos n\theta, \quad S_n(\lambda, \theta) = \alpha_n \sin n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4.2)$$

where the α_n are expressed in a simple way by means of hypergeometric functions. The particular solutions (1.4.2) evidently correspond to the set

$$c_n(\lambda, \theta) = \lambda^n \cos n\theta, \quad s_n(\lambda, \theta) = \lambda^n \sin n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.4.2')$$

of solutions for Laplace's equation $\Delta \Psi^* = 0$. Every solution (1.4.1) may be associated with the harmonic function (i. e., a function which satisfies Laplace's equation)

$$P_N(\lambda, \theta) = \sum_{n=1}^N \lambda^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (1.4.1')$$

and will, in fact, have many properties similar to those of the latter. Hydrodynamically, this means that $\Psi_N = s^{-1/2} \Psi_N^*$ and P_N will be stream-functions of compressible and incompressible flows, respectively, bearing more or less similarity to each other. Thus, the great experience in the theory of ideal incompressible flows may be used in order to create similar compressible flow patterns by the association $(1.4.1) \leftrightarrow (1.4.1')$. This transition may be conceived as an "operator" transforming a solution of the one differential equation into a corresponding solution of the other. Let us mention that determining the incompressible flow around the given obstacle and obtaining the complex potential as a function of $(\log q, \theta)$ is always a solvable problem by the use of Theodorsen's method⁵.

Unfortunately, there appear in the theory of incompressible fluid flows functions that are neither regular nor single-valued when expressed in the hodograph plane. Consider for example a flow originating from a doublet at infinity and passing around a circle; one easily verifies that in the hodograph plane the stream-function is a two-valued function possessing a point with branch character corresponding to the point at infinity in the physical plane. In general, even in the simplest examples of flows around closed curves we may expect stream-functions that are multivalued and possess singularities of various kinds. Moreover, the infinite series representing a solution by Chaplygin's method will converge in general only within the part of the

⁵ Th. Theodorsen: Theory of wing sections of arbitrary shape. N. A. C. A., Rep. No. 411 (1931).

domain in which the flow is defined. Therefore several expressions are needed in order to obtain the whole flow. Bergman⁶ derived another method which yields certain types of particular solutions Ψ_v , the stream-function of a compressible fluid flow. Bers and Gelbart⁷ obtained the same solutions independently of Bergman. They denote the functions $\Phi_v + i\Psi_v$ as Σ -monogenic functions. Here Φ_v is the potential function. But the flow patterns generated by the functions ψ_v mentioned above (Bergman, Bers) or a linear combination of them $\Sigma \alpha_v \Psi_v$, are of rather special character. In particular, the flow patterns with stream-functions $\Sigma \alpha_v \Psi_v$, cannot (in general) represent an entire flow around a closed body (a similar situation to Chaplygin's method). Frequently, in the theory of analytic functions of a complex variable in a similar situation (i. e., when one expression of a certain kind—e. g., power series—does not represent the function, say, f , in the entire domain B in which the function has to be considered), the procedure employed is to decompose B into smaller regions, say, B_K , $K = 1, 2, \dots, n$, $\sum_{K=1}^n B_K = B$, such that it is possible to

find in every region B_K , another analytic expression which represents f in that region. Generalizing this method of representation of a function of a complex variable, Bergman described in ⁸ a method for representing the stream-function by means of decomposing the domain B into parts B_K , and representing Ψ in every B_K by another analytical expression. This method will be given in the part on transonic flow.

But in many instances it is important to have a single expression represent the whole flow. Thus the problem arises to develop another procedure in order to make harmonic functions correspond to solutions of Chaplygin's equation. This procedure has to be defined in the hodograph plane and must be applied in domains situated on Riemann surfaces (see 0.1) over this plane. Only such methods will permit the translation of incompressible fluid flow patterns into flow patterns of a compressible fluid in the large (see 0.1). Such a method has been elaborated by Bergman^{6, 9, 10} through ¹⁵. One of the fundamental ideas of this method is the application of "operators" transforming the solutions of flow around closed curves in the domain of an incompressible fluid into the solutions of flow around closed curves in the domain of a compressible fluid. This will be discussed more thoroughly in the next section.

5. Method of generating stream-functions.

According to Bergman's method, we integrate the transformed Chaplygin's equation (1.2.4) by setting⁴

$$\Psi^* = \sum_{n=0}^{\infty} g_n G_n, \quad (1.5.1)$$

where each G_n depends on λ only and each g_n is a harmonic function of λ and θ . This series will be subjected to certain formal transformations. The justification of these

⁶ Bergman: A formula for the stream function of certain flows. Proc. nat. Acad. Sci. USA 29, 276—281 (1943).

⁷ L. Bers and A. Gelbart: On a class of differential equations in mechanics of continua. Quart. Appl. Math. 1, 168—188 (1943). — On a class of functions defined by partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. 56, No. 1, 67—93 (1944).

⁸ S. Bergman: On two-dimensional flows of compressible fluids. N. A. C. A., T. N. No. 972 (1945).

⁹ S. Bergman: Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen, I. Recueil Mathématique, Nouvelle Série 2, 1169—1198 (1937).

¹⁰ S. Bergman: Review of the paper: Two-dimensional irrotational transonic flows of a compressible fluid. By Y. H. Kuo: N. A. C. A., T. N. No. 1445 (1948); in Mathem. Reviews 11, No. 3, 223 (1950).

transformations will be given in the next section by studying the convergence of the series considered. We find from the identity:

$$\Delta(A B) = A \Delta B + B \Delta A + 2(A_\lambda B_\lambda + A_\theta B_\theta),$$

and

$$(G_n)_\theta = 0, \quad \Delta g_n = 0,$$

that

$$\Delta(g_n G_n) = g_n G_n'' + 2 G_n' (g_n)_\lambda.$$

Introducing the value of $\Delta(g_n G_n)$ in (1.5.1), we obtain

$$\Delta \Psi^* = \sum_0^\infty [g_n G_n'' + 2 G_n' (g_n)_\lambda],$$

so that

$$\Delta \Psi^* + f \Psi^* = \sum_0^\infty [g_n (G_n'' + f G_n) + 2 G_n' (g_n)_\lambda]. \quad (1.5.2)$$

In order to have the right-hand side vanish as required in (1.2.4), we choose:

$$G_0 = 1, \quad G'_{n+1} = G_n'' + f G_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.5.3a)$$

$$2(g_n)_\lambda = -g_{n-1}, \quad (1.5.3b)$$

where g_0 is harmonic, but otherwise arbitrary. Then (1.5.2) becomes

$$\Delta \Psi^* + f \Psi^* = \sum_0^\infty [g_n (G'_{n+1} - f G_n + f G_n) - g_{n-1} G_n'] = \sum_0^\infty [g_n G'_{n+1} - g_{n-1} G_n'] = 0,$$

as is easily seen by rearrangement of the series and in view of the fact that $G_0' = 0$. Thus, (1.5.1) with the conditions (1.5.3a) and (1.5.3b) is a solution of (1.2.4). We now solve the recursion formula (1.5.3b) for the g_n functions in the following form: The functions g_n must be harmonic functions of λ and θ . Therefore we choose analytic functions $\Phi_n(Z)$, $Z = \lambda + i\theta$, such that $\Phi_0(Z)$ is arbitrary analytic, and

$$\Phi_n(Z) = -\frac{1}{2} \int_0^Z \Phi_{n-1}(t) dt, \quad (1.5.4)$$

and let g_0 be the real part of $\Phi_0(Z)$ and g_n the real part of Φ_n , i. e., $g_n = \text{Re}\{\Phi_n(Z)\}$. Then we have, in view of (1.5.4),

$$2(g_n)_\lambda = \text{Re}\{2\Phi_n'\} = -\text{Re}\{\Phi_{n-1}\} = -g_{n-1},$$

which shows that the g_n satisfy in fact the recursion formula (1.5.3b). On the other hand, we may easily derive from (1.5.4)

$$\Phi_n(Z) = \frac{(-1)^n}{(n-1)! 2^n} \int_0^Z \Phi_0(t) (Z-t)^{n-1} dt, \quad n > 0, \quad (1.5.4')$$

whence

$$g_n(\lambda, \theta) = \frac{(-1)^n}{(n-1)! 2^n} \text{Re} \left\{ \int_0^Z \Phi_0(t) (Z-t)^{n-1} dt \right\}. \quad (1.5.5)$$

Consequently, the development (1.5.1) takes the form:

$$\Psi^*(\lambda, \theta) = g_0(\lambda, \theta) + \sum_1^\infty G_n(\lambda) \text{Re} \left\{ \int_0^Z \Phi_0(t) \frac{(-1)^n (Z-t)^{n-1}}{2^n (n-1)!} dt \right\}. \quad (1.5.6)$$

6. The domain of convergence of the development for Ψ^* .

Assume in (1.5.6) a uniform convergence for t in a certain domain⁴. This assumption allows us to interchange the process of summation and integration, so that

$$\Psi^*(\lambda, \theta) = g_0(\lambda, \theta) + \operatorname{Re} \left\{ \int_0^Z \Phi_0(t) U(t; \lambda, \theta) dt \right\}, \quad (1.6.1)$$

with

$$U(t; \lambda, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\lambda) \frac{(-1)^n (Z-t)^{n-1}}{2^n (n-1)!}. \quad (1.6.1a)$$

The transformation of the series of $\Psi^*(\lambda, \theta)$ is valid in exactly the same domain of the complex t -plane, where (1.6.1a) converges uniformly. In order to find a domain of uniform convergence of $U(t; \lambda, \theta)$, we shall apply the following procedure: we shall find a series which dominates the series $U(t; \lambda, \theta)$ and shall study its convergence. Because the development of U contains the functions G_n , we have first to find functions $Q_n(\lambda)$ such that, for each n , $Q_n(\lambda)$ dominates $G_n(\lambda)$. This means that, for $-\infty < \lambda < 0$, all Q_n and their derivatives are larger than or equal to the moduli (absolute values) of the G_n and of their corresponding derivatives; by means of symbols, the condition that $G_n \ll Q_n$, will imply:

$$G_n \leq Q_n, \quad \text{and} \quad \left| \frac{d^k G_n}{d\lambda^k} \right| \leq \frac{d^k Q_n}{d\lambda^k}. \quad (1.6.2)$$

It is easy to prove that: (A) For each partial differential equation of the type of equation (1.2.4), where $f(\lambda)$ can be dominated by an expression of the form $U(\varepsilon - \lambda)^{-2}$, which mathematically may be presented in the form

$$f \ll F = C(\varepsilon - \lambda)^{-2}, \quad C > 0, \quad \varepsilon < 0, \quad (1.6.3)$$

the corresponding series $U(t; \lambda, \theta)$ is uniformly convergent in the domain⁴

$$\left| \frac{Z-t}{2(\varepsilon - \lambda)} \right| \leq a < 1. \quad (1.6.3')$$

(B) A suitable constant C in (1.6.3) can be determined in the special case we are dealing with, namely, the function f derived from the isentropic conditions⁴.

(A) We shall present only an outline of the proof. Namely, under the assumption (1.6.3) we easily find that Q_n satisfying the condition (1.6.2) is of the form

$$Q_n = n! \mu_n (\varepsilon - \lambda)^{-n}, \quad (1.6.4)$$

with the following recursion formula for the constants μ_n :

$$\mu_0 = 1, \mu_{n+1} = \mu_n (n + \alpha) (n + \beta) (n + 1)^{-2}, \quad (1.6.5)$$

where $\alpha = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} - C\right)^{1/2}$, $\beta = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - C\right)^{1/2}$.

As one may easily notice, the coefficients μ_n obey the same recursion formula as the coefficients of the hypergeometric series

$$H(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots = \sum_{v=0}^{\infty} \mu_v x^v, \quad (1.6.5a)$$

with $\gamma = 1$. Because none of the parameters α, β, γ , is zero or a negative integer, according to the theory of hypergeometric series, the series H , together with all its

derivatives, is uniformly convergent for $|x| \leq a < 1$. Substituting (1.6.4) into (1.6.1a) in place of G_n we obtain after some transformations

$$U(t; \lambda, \theta) \leq \frac{1}{2} (\varepsilon - \lambda)^{-1} \frac{d}{dx} H_1, \quad (1.6.6)$$

where H_1 denotes the hypergeometric series of the form

$$H_1 = H_1(\alpha, \beta, 1; x), \quad x = \frac{1}{2} \frac{|Z - t|}{|\varepsilon - \lambda|}. \quad (1.6.6a)$$

As mentioned above, the hypergeometric series is a uniformly convergent series for $|x| \leq a < 1$. From the fundamental concepts of analysis it is known that a series whose dominant is a convergent series of positive terms (this last condition in the present case is not essential, as one may easily show), converges uniformly. Hence the uniform convergence of U and, therefore, of the development for Ψ^* , is assured for each region $\frac{1}{2} \frac{|Z - t|}{|\varepsilon - \lambda|} \leq a < 1$. In this domain, the series for $U(t; \lambda, \theta)$ as well as those for all derivatives of this function converge uniformly and absolutely. This justifies all the transformations performed in section I.5, and proves that Ψ^* satisfies (1.2.4).

(B) We shall briefly outline the proof that in equation (1.6.3) a suitable constant C can be determined in the case of the function f that was derived in section I.3 on the basis of the isentropic relation. Introducing the variable T into the expression for f (1.3.11) we obtain

$$f(T) = \alpha_1 T^{-6} + \beta_1 T^{-5} + \dots, \quad (1.6.7)$$

where α_1, β_1, \dots are constant coefficients. As is obvious from (1.6.7), f is an analytic function of T and the development (1.6.7) is regular for all complex values of T finite and different from zero. The formula (1.3.13) shows that for complex values of T the variable λ assumes complex values also. From equation (1.3.13) we see that λ is a regular analytic function of T if $T \neq \pm 1, \pm h^{-1}$, and that for these exceptional values of T , λ becomes infinite. For $T = \infty$ every determination of λ is purely imaginary. Of course, vice versa, T is a certain function of λ and $f(T) = f(T(\lambda))$. By a suitable transformation⁴ it is possible to show that

$$\left| \frac{d^n f(T(\lambda))}{d\lambda^n} \right| \leq n! K (\varepsilon - \lambda)^{-n}, \quad (1.6.8)$$

where K is a constant. On the other hand, we have from the definition of F in (1.6.3)

$$\frac{d^n F}{d\lambda^n} = C (n+1)! (\varepsilon - \lambda)^{-(n+2)}.$$

Hence, for real $\lambda < \varepsilon$

$$\frac{d^n f(T(\lambda))}{d\lambda^n} \leq K C^{-1} (n+1)^{-1} (\varepsilon - \lambda)^2 \frac{d^n F}{d\lambda^n},$$

and choosing

$$C = K A^2 (n+1)^{-1}, \quad A \geq -\lambda, \quad (1.6.9)$$

we obtain

$$\left| \frac{d^n f}{d\lambda^n} \right| \leq \frac{d^n F}{d\lambda^n}, \quad (1.6.10)$$

as required, since $(\varepsilon - \lambda)^2 A^{-2}$ is greater than or equal to unity. The discussion⁴ of the inequalities (1.6.3), (1.6.3'), and of the condition (1.6.9) as well as that of $\varepsilon \geq \lambda \geq -A$, leads to the determination of the domain of the convergence of the series (1.5.6). This domain is contained on the left-hand side of the (λ, θ) plane between two vertical lines; $-\varepsilon = \text{const.}$ and $-A = \text{const.}$, and two straight lines

$\theta = \pm 3^{1/2} \lambda$ through the origin forming an angle of 120° with each other. In the interior of this domain all the inequalities (1.6.3), (1.6.3'), the condition (1.6.9) and $\varepsilon \geq \lambda \geq -A$ are insured and hence we may assume the absolute and uniform convergence of the series (1.5.6) in each closed subdomain of the angular domain considered, as long as $\Phi_0(Z)$ itself is bounded in this domain.

7. Discussion of the domain of convergence of the series representing Ψ^* .

We have outlined the proof that the series (1.5.6) converges absolutely and uniformly in each closed subdomain of the angular domain $|\theta| < 3^{1/2} |\lambda|$. The question arises whether this series might not converge outside this domain, too. If we introduce into the recursion formula (1.5.3a), instead of f , the comparison function $\tilde{f}(\lambda) = C/\lambda^2$, we obtain instead of the G_n -factors the terms (1.6.4) with $\varepsilon = 0$ and the general term of our series is, therefore

$$a_n = 2^{-n} n \mu_n \lambda^{-n} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^Z \Phi_0(t) (Z-t)^{n-1} dt \right\}, \quad (1.7.1)$$

instead of (1.5.6). In particular, if $\Phi_0(Z) \equiv 1$, we obtain

$$a_n = \mu_n \cdot \operatorname{Re} \{ Z^n (2\lambda)^{-n} \}. \quad (1.7.2)$$

Let us write

$$Z = |Z| e^{i\alpha}, \quad \lambda = |Z| \cos \alpha. \quad (1.7.3)$$

Then we have

$$|a_n| = \mu_n |2 \cos \alpha|^{-n} |\cos n\alpha|. \quad (1.7.4)$$

We may now choose a point Z outside our domain of proved convergence, but arbitrarily near it by taking $\alpha = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{N}$, where N is a sufficiently large integer. For all integers n' which are multiples of N we have

$$|a_{n'}| \geq \frac{1}{2} \mu_{n'} |2 \cos \alpha|^{-n'}. \quad (1.7.5)$$

Since $|2 \cos \alpha| < 1$, and $\lim_{n' \rightarrow \infty} \left| \frac{\mu_{n'} + 1}{\mu_{n'}} \right| = 1$, which means that the series $\mu_{n'}$ is a divergent one, one easily sees that the sequence $|a_{n'}|$ will increase beyond every bound. Hence, in this case, the series for Ψ^* does not converge outside the angular domain $|\theta| < 3^{1/2} |\lambda|$. Since $\tilde{f}(\lambda)$ behaves asymptotically like $f(\lambda)$ at $\lambda = 0$, there is therefore little chance that the conditions of convergence of (1.5.1) can be improved. In general, we shall need solutions of the differential equation (1.2.4) that are defined not only in the aforementioned domain of convergence. There are two ways to improve our previous results.

First, we remark that in every domain $\operatorname{Re} \{Z\} < b < 0$ the function $f(\lambda)$ may be approximated to any degree of precision by a series of the form

$$f_m(\lambda) = \sum_{\nu=1}^m c_\nu \exp(\lambda \nu), \quad (1.7.6)$$

which is, as an analytic function of the real variable λ , regular in the whole finite λ -plane. Thus, as in part B of section I.6, we may show that the development for a solution Ψ_m^* of the differential equation

$$\Delta \Psi_m^* + f_m(\lambda) \Psi_m^* = 0, \quad \text{or} \quad \frac{1}{4} \Delta \Psi_m^* + F_m(\lambda) \Psi_m^* = 0, \quad (1.7.7)$$

where $f_m = 4F_m$, converges in the entire half-plane $\operatorname{Re} \{Z\} < 0$. If we replace, therefore, the function $f(\lambda)$ by an approximating $f_m(\lambda)$, we obtain a good agreement

between the physical behavior of the gas described by the function $f_m(\lambda)$ and that of the compressible gas described by $f(\lambda)$ up to a certain Mach number, as well as a series development for the solution Ψ_m^* that converges absolutely in the whole domain $\text{Re}\{Z\} < 0$. On the other hand, one should not exaggerate the importance of this result. The computation of the $G_n(\lambda)$ for the real $f(\lambda)$ is still quite a difficult task. If, for every degree m of approximation one had to carry out new computations for the corresponding $G_n^{(m)}(\lambda)$, the amount of work might be excessive. Moreover, we know that the convergence in the half-plane $\text{Re}\{Z\} < 0$, will become worse for increasing approximation outside the sector $|\theta| < 3^{1/2}|\lambda|$. Let us mention that—as was shown by Bergman⁸—the actual solution of (1.2.4) may be written in the form

$$\Psi^* = \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_m^*. \quad (1.7.7a)$$

We wish, therefore, to point out another way of continuing the development of Ψ^* outside the original domain of convergence. To this end let us describe briefly the process of analytic continuation. Consider a power series in $Z = \lambda + i\theta$. This series converges and represents a function for certain values of Z only, $Z < 1$, say. This means that this series converges at all points located in the interior of the circle of the radius $Z = 1$. The question arises, whether it is possible to define the function at points outside the circle in such a way that the function possesses a derivative and is single-valued at each point (i. e., is analytic) in a larger domain than the interior of the circle. For this purpose choose any point P_1 within the circle. We know the value of the function and all its derivatives at P_1 , from the series, and so we can form the Taylor series for the same function with P_1 as origin, which will define a function analytic throughout some circle of the center P_1 . This new circle will usually lie partly outside the old circle of convergence, and for points in the region which are included in the new circle but not in the old circle, the new series may be used to define the values of the function, although the old series failed to do so. Similarly, we can take any other point P_2 , in the region for which the values of the function are now known, and form the Taylor series with P_2 as origin. This will, in general, enable us to define the function at other points at which its values were not previously known and so on. This process is called analytic continuation.

Consequently, if the function exists outside the domain of convergence $|\theta| < 3^{1/2}|\lambda|$, then the values of Ψ^* can be obtained by use of various methods of analytic continuation. For example, the Borel summation method¹ or that of Lindelöf can be used. Borel's result represents an analytic function in a more extended region than the interior of the circle of convergence. Using the Borel method, we write⁴

$$s_n(\lambda, \theta) = \sum_{\nu=0}^n G_\nu(\lambda) g_\nu(\lambda, \theta), \quad (1.7.8)$$

and obtain

$$\Psi^*(\lambda, \theta) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \exp(-x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} s_n(\lambda, \theta) \right\}. \quad (1.7.9)$$

This expression coincides with the original Ψ^* in the whole domain of convergence. It might converge in a much wider domain. If we again in replace $f(\lambda)$ by our function of comparison $\tilde{f}(\lambda) = C/\lambda^2$, one sees easily for instance that this expression (1.7.9) is defined in the entire half-plane $\text{Re}\{Z\} < 0$. It is, therefore, a useful transformation for the original function $f(\lambda)$ too, and leads, in fact, in most cases, to the representation of $\Psi^*(\lambda, \theta)$ throughout the required domain.

8. Transformation to the physical plane.

After a stream-function $\Psi = s^{-1/2} \Psi^*$ has been determined in the λ, θ -plane by means of the method discussed above, the task still remains of determining the flow in the physical plane—i. e., to express Ψ as a function of x and y . The transition is almost immediate, for the mapping of the λ, θ -plane upon the x, y -plane is given by the following formulas:

$$x = \int e^{-1} \{ [-A \Psi_\theta (\cos \theta) - q^{-1} \Psi_\lambda \sin \theta] d\lambda + [A \Psi_\lambda \cos \theta - q^{-1} \Psi_\theta \sin \theta] d\theta \}, \quad (1.8.1a)$$

$$y = \int e^{-1} \{ [-A \Psi_\theta \sin \theta + q^{-1} \Psi_\lambda \cos \theta] d\lambda + [A \Psi_\lambda \sin \theta + q^{-1} \Psi_\theta \cos \theta] d\theta \}, \quad (1.8.1b)$$

$$A = q^{-1} (1 - M^2)^{1/2}. \quad (1.8.1c)$$

9. Alternative formulas, additional remarks.

Let us mention that various representations of Bergman's procedure and his final results are possible. Below, we shall try to represent all possible phases and variations of his method. This will enable the reader to follow not only the original papers of Bergman, if he wishes to do so, but also the numerous tables of various functions which are so important in applications of this method to practical problems. In previous sections we explained the meaning of a few functions such as Ψ , Ψ^* , etc. We discussed the behavior of the compressibility equation in the pseudo-logarithmic plane (λ, θ) or in the Gaussian plane $Z = \lambda + i\theta$. We note, without showing it in a more precise way, that one may use various systems of coordinates such as: $\lambda + i\theta$, $\lambda - i\theta$, $\theta + i\lambda$, or $\theta - i\lambda$. Theoretically, it makes no difference which system we use and in the subsequent sections we shall refer to all these systems; similarly, the functions Ψ , Ψ^* , etc., will be used, depending upon the situation. To avoid complicating the present representation of Bergman's method, we shall restrict ourselves in many instances to a simple citation of the final results and formulas, referring the reader who is mathematically more advanced to his original papers, where all the proofs are given.

The differential equation for Ψ in the pseudo-logarithmic plane, corresponding to (1.2.4) is given by the formula

$$\Psi_{\lambda\lambda} + \Psi_{\theta\theta} + 4N \Psi_\lambda = 0, \quad N = -\frac{1}{8}(k+1) \frac{M^4}{(1-M^2)^{3/2}}. \quad (1.9.1)$$

An alternative solution of the second equation (1.7.7) is given by the formula

$$\Psi_m^* = \text{Im} \left\{ g(\bar{Z}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} g^{(n)} Q_m^{(n)} \right\}, \quad (1.9.2)$$

where $\bar{Z} = \lambda - i\theta$, and

$$g^{(0)}(\bar{Z}) = g(\bar{Z}), \quad g^{(n)}(\bar{Z}) = \int_0^{\bar{Z}} g^{(n-1)}(\bar{Z}) d\bar{Z}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.9.2a)$$

The solution Ψ_m^* of (1.7.7) is the imaginary part of the series (1.9.2) which converges in the interior of the wedge-shaped region $|\theta| \leq 3^{1/2} |\lambda|$ of the half-plane $\lambda < 0$. The function $g(\bar{Z})$ is any arbitrary analytic function of \bar{Z} , which contains the origin and is regular (i. e., does not possess singularities) in the entire domain in which we wish to obtain a solution. As the lower limit of the integral in (1.9.2a) any fixed value of \bar{Z} , α , say, $\text{Re } \alpha \leq 0$, may be taken. If $\alpha = 0$, we obtain the above mentioned region $|\theta| \leq 3^{1/2} |\lambda|$. The functions $Q^{(n)}(2\lambda)$ are defined by the recurrence formula:

$$(2n+1)Q_{\lambda}^{(n+1)} + Q_{\lambda\lambda}^{(n)} + 4F_m(\lambda)Q^{(n)} = 0, \quad (1.9.3)$$

or

$$(2n+1)Q^{(n+1)} = -Q_{\lambda}^{(n)} - 4 \int_{-\infty}^{\lambda} F_m(\lambda) Q^{(n)}(\lambda_1) d\lambda_1, \quad \text{with } n = 1, 2, \dots \quad (1.9.4)$$

$$Q^{(1)} = - \int_{-\infty}^{\lambda} 4F_m(\lambda) d\lambda,$$

$$Q^{(0)} = 1,$$

and

$$Q^{(n)}(-\infty) = 0.$$

From (1.9.3) we may easily obtain:

$$Q^{(2)} = -\frac{4}{3}F_m(\lambda) + \frac{1}{6}Q^{(1)2}, \quad (1.9.5)$$

$$Q^{(3)} = -\frac{4}{15}(F_m)_{\lambda} + \frac{4}{15}F_m Q^{(1)} - \frac{16}{15} \int_{-\infty}^{\lambda} F_m^2 d\lambda + \frac{1}{90}Q^{(1)3}, \text{ etc.} \quad (1.9.6)$$

Equation (1.9.3) determines each $Q^{(n)}$ to within a constant; this constant can be specified by the requirement that for some fixed value, say, $q = q_0$ (and, therefore, for some λ , say, $\lambda = \lambda_0$), $Q^{(n)}$ vanishes. Bergman¹¹ proposed as the most natural choice that all $Q^{(n)}$ should vanish for $\lambda = -\infty$, i. e., for $q = 0$. This assumption gives the lower limit of the integral in the formula (1.9.4).

According to definition $\Psi^* = s^{1/2} \Psi$ (see I. 2); hence $\Psi = H \Psi^*$, where $H = s^{-1/2}$ or

$$H = (1 - M^2)^{-1/4} \left[1 + \frac{1}{2}(k-1)M^2 \right]^{-\frac{1}{2(k-1)}}, \quad (1.9.7)$$

as one can easily verify, using the identities $q = \left[1 - \frac{1}{2}(k-1)q^2 \right]^{1/(k-1)}$ and $M^2 = q^2 [1 - (k-1)q^2/2]$, where the units of mass and velocity are so chosen that at a stagnation point $q = 1$, and $dp/dq = 1$. Hence a solution of (1.9.1) is given by $H \Psi^*$, where Ψ^* is defined by (1.9.2). It is often more convenient to use another operator which can be obtained from (1.9.2) by setting

$$g(\bar{Z}) = \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{1}{2}\bar{Z}(1-t^2)\right) (1-t^2)^{-1/2} dt, \quad (1.9.8)$$

namely

$$\begin{aligned} \Psi = \text{Im} \left\{ H \left[\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{1}{2}\bar{Z}(1-t^2)\right) (1-t^2)^{-1/2} dt + \int_{-1}^{+1} \bar{Z} Q^{(1)} t^2 f\left(\frac{1}{2}\bar{Z}(1-t^2)\right) (1-t^2)^{-1/2} dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-1}^{+1} (\bar{Z})^2 Q^{(2)} t^4 f\left(\frac{1}{2}\bar{Z}(1-t^2)\right) (1-t^2)^{-1/2} dt + \dots \right] \right\}. \quad (1.9.9) \end{aligned}$$

Both (1.9.2) and (1.9.9) represent two forms of the so-called "integral operator of the second kind". The disadvantage of this operator is that it converges only in a certain portion of the subsonic region (i. e., a portion of the half-plane $\lambda < 0$). In addition to this operator there exists, among others, the so-called integral operator of the first kind^{6, 12}, which possesses the advantage of converging in the whole

¹¹ S. Bergman: On supersonic and partially supersonic flows. N. A. C. A., T. N. No. 1096 (1946).

¹² S. Bergman: Two-dimensional subsonic flow of a compressible fluid and their singularities. Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 452-498 (1947).

subsonic region, but which on the other hand does not appear to be suitable for actual numerical computation. Both these operators will be discussed more thoroughly in the section on transonic flow.

In equations (1.5.1), (1.9.2) and others, the functions G_n , H and $Q^{(n)}$ are functions of λ only and are the same for all stream-functions. They may be computed once and for all and the results used in all future computations. If any analytic functions $g^{(0)}$ of a complex variable Z (regular at $Z = 0$) is substituted into one of the formulas given above, the result is a stream-function of a subsonic compressible fluid flow pattern. On the other hand, it is well-known that an analytic function g ($\log q - i\theta$) may be regarded as defining a flow pattern of an incompressible fluid. Consequently, those formulas may be interpreted as operators which distort an incompressible flow pattern into a compressible one. The operator formulas are of such a form that a knowledge of the incompressible flow pattern used leads directly to both qualitative and quantitative knowledge of the behavior of the stream-function of the corresponding compressible flow.

As mentioned above, from the purely mathematical point of view, an operator is a rule which is applied to a function of one class to obtain a function belonging to another class. A simple example of an operator is the process of obtaining a harmonic function (i. e., a function satisfying Laplace's equation) of two real variables by taking the real (or imaginary) part of an analytic function of a complex variable. This operator preserves many properties of analytic functions and is often used as a tool for the investigation of harmonic functions.

An obvious objection is that, whereas any incompressible flow will lead to some compressible flow, there seems to be no indication of how to find precisely the g to be substituted into the operator so that we may have a specified obstacle in the compressible flow. A procedure to solve this problem approximately can be developed¹³. In practical application the procedure described below may be applied. However, it is easy to see why the same analytic function g which solves the corresponding incompressible problem can be expected to yield a first approximation to the compressible problem in the case of low speeds: for in such a case the solution (1.9.2) is easily shown to yield a flow very similar to the incompressible flow, which agrees with the physical state of affairs.

The fundamental problem to be faced in the theory of airfoils is to determine the flow with a certain velocity at infinity around an obstacle given in the physical plane. This leads to a very complicated non-linear problem in the hodograph plane since the domain where the flow is defined is determined by the flow itself. But, as mentioned above, we may overcome this difficulty by choosing a function g which solves the corresponding incompressible problem. With this g let $\tilde{\Psi}(\lambda, \theta)$ be the solution of (1.9.1) obtained from (1.9.2). A solution $\Psi(\lambda, \theta)$ of (1.9.1) is further determined such that $\tilde{\Psi} + \Psi$ assumes a constant value on the boundary h (of the hodograph of the incompressible flow). This particular streamline $\Psi - \tilde{\Psi} + \Psi$ defines the shape of the body, the image of which in the physical plane will give a distorted (in a certain way) shape of the actual body: if the given profile is distorted in opposite directions and if the procedure described is repeated to the distorted profile, then in many instances a better approximation is obtained. This method may be repeated until the desired degree of accuracy is attained.

The procedure explained below (proposed by Bergman), may be more suitable in practical applications. To explain the method more clearly, let us consider the

¹³ S. Bergman: The hodograph method in the theory of compressible fluids. Supplement to "Fluid Dynamics" by R. v. Mises and K. O. Friedrichs. Brown University. 1941/42.

flow of an incompressible fluid, as a starting point. Then a rather large class of symmetric flows around closed obstacles can be obtained¹⁴ by putting:

$$\Psi^+ = \sum A_\nu \Psi_\nu^+(\lambda^+, \theta), \quad (1.9.10)$$

where A_ν are arbitrary constants and the symbol Ψ^+ denotes a stream-function in the domain of incompressible fluids. For the set $\{\Psi^+\}$ it is advisable to choose the real and imaginary parts of the functions:

$$\Psi_{2\kappa}^+(\lambda^+, \theta) + i \Psi_{2\kappa+1}^+(\lambda^+, \theta) = (\exp \bar{Z}^+ - \exp \alpha)^{\kappa/2}, \quad (1.9.11)$$

$$\kappa = -1, 0, 1, 2, \dots \text{etc.},$$

$$\bar{Z}^+ = \lambda^+ - i\theta, \quad \lambda^+ = \log q,$$

where α is a constant, whose value may be calculated from the conditions at infinity. Namely, $\exp \alpha$ is equal to the velocity vector at infinity. In analogy to the above set we may choose in the compressible case the class of functions $\Psi_\nu(\lambda, \theta)$ given by

$$\Psi_{2\kappa}(\lambda, \theta) + i \Psi_{2\kappa+1}(\lambda, \theta) = P[(\exp \bar{Z} - \exp \alpha)^{\kappa/2}], \quad (1.9.12)$$

$$\kappa = -1, 0, 1, 2, \dots, \quad \bar{Z} = \lambda - i\theta,$$

where the symbol P denotes the "integral operator of the second kind", which, as explained above, generates solutions of the compressibility equations having many properties similar to those of the analytic functions to which the operator is applied. For each fixed value of the parameter α , it is possible, by applying the operator P , to generate a set (1.9.12) of solutions of the compressibility equation. From this set of solutions it is then possible to determine, by the use of (1.8.1), the corresponding functions $x(\lambda, \theta)$ and $y(\lambda, \theta)$, so that by the use of (1.9.10) it would be possible to construct a broad class of compressible flow patterns. A slight modification of this procedure is the following:

Suppose that we are interested in determining flows past certain types of profiles, say Joukowski profiles or those of elliptical shape. By solving the corresponding incompressible flow problems, determining the complex potentials in the logarithmic plane ($\bar{Z}^+ = \lambda^+ - i\theta$), and applying the P -operator to these functions (with λ^+ replaced by λ), there are obtained complex solutions of the compressibility equation whose imaginary parts give the stream-functions (in the $\bar{Z} = \lambda - i\theta$ -plane) of a compressible fluid flow past an obstacle bearing a certain resemblance to that appearing in the corresponding incompressible flow. By adding to this stream-function, which we may designate as a "basic solution", the stream-function $\Psi_{2\kappa}$, $\Psi_{2\kappa+1}$, corresponding to $\kappa = 0, 1, 2, \dots$ in (1.9.12) one can, by taking various choices of the coefficients A_ν in (1.9.10), construct a class of compressible fluid flows which may be looked upon as modifications of that given by the "basic solution". It may be noted¹⁴ that for even values of κ the functions to which the P -operator is applied become polynomials in $\exp \bar{Z}$, so that it suffices to determine the functions $P(\exp n \bar{Z})$, $n = 0, 1, 2, \dots$. For odd values of κ this simplification is not possible. Thus we obtain three sets of solutions: A. Basic solutions; B. Functions obtained by applying the P -operator to integral powers of $(\exp \bar{Z} - \exp \alpha)^{1/2}$, i. e. $(\exp \bar{Z} - \exp \alpha)^{\kappa/2}$ where $\kappa = 1, 3, 5, 7, \dots$, and for α assuming a sufficiently dense set of values (a two-parameter family of functions); C. Functions obtained from $\exp(n \bar{Z})$ in the same manner as described in B (a one-parameter family of functions). We

¹⁴ S. Bergman and B. Epstein: Determination of a compressible fluid flow past an oval-shaped obstacle. *J. Math. Physics* **26**, 195—222 (1948).

note that in order to avoid the necessity of adding too many terms of solutions listed under B and C, it is useful to prepare not one basic flow pattern, but for each type of obstacle a number of "basic solutions" corresponding to different values of any parameter, e. g., for an ellipse for a number of values of the eccentricity.

The operator method, described above, involves the following elements:

1. It is necessary to have considerable knowledge about incompressible flow patterns, in particular about their image in the hodograph and logarithmic planes.

2. The operator formula has to be derived, the functions H and $Q^{(n)}$ have to be determined, and rules must be developed for interpreting properties of incompressible fluid motions as properties of the corresponding compressible flows given by the operator.

If the origin is moved and λ is replaced by $\lambda^* - \alpha$, say, that is, we set⁸

$$\lambda = \lambda^* - \alpha, \quad \theta = \theta^*, \quad \alpha \text{ real}, \quad (1.9.13)$$

then the second equation (1.7.7) assumes the form

$$\frac{1}{4} A^{(\alpha)} \Psi_m^* + F_m^{(\alpha)} (\lambda^*) \Psi_m^* = 0, \quad (1.9.14)$$

where

$$A^{(\alpha)} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad F_m^{(\alpha)} = F_m(2\lambda^* - 2\alpha). \quad (1.9.15)$$

The solution of (1.9.14) is given by the following formula (1.9.16), where the substitution $\Psi = H \Psi^*$ is used

$$\Psi = H \Psi^* = H(2\lambda^* - 2\alpha) \operatorname{Im} \left[g(\bar{Z}^*) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} Q^{(n)}(2\lambda^* - 2\alpha) g^{(n)}(\bar{Z}^*) \right], \quad (1.9.16)$$

$$\bar{Z}^* = \bar{Z} + \alpha = \lambda^* - i\theta, \quad (1.9.17a)$$

$$g^{(n+1)}(Z^*) = \int_0^{\bar{Z}^*} g^{(n)}(Z_1^*) dZ_1^*. \quad (1.9.17b)$$

The transformation from the pseudo-logarithmic plane to the physical plane may be achieved in two ways: either directly by means of (1.8.1), or indirectly. In the latter case, we pass at first from the pseudo-logarithmic plane (λ, θ) to the hodograph plane (q, θ) , using the relation (1.3.13), and next from the hodograph plane to the physical plane.

The transformation from the hodograph plane (q, θ) to the physical plane may be achieved by means of formulas, given below (analogous to 1.8.1):

$$x = - \int (\varrho q^2)^{-1} \cos \theta (\Psi_\theta)^{-1} [(1 - M^2) \Psi_\theta^2 + q^2 \Psi_q^2] dq, \quad (1.9.18a)$$

$$y = - \int (\varrho q^2)^{-1} \sin \theta (\Psi_\theta)^{-1} [(1 - M^2) \Psi_\theta^2 + q^2 \Psi_q^2] dq, \quad (1.9.18b)$$

where the integration is carried out along a streamline, $\Psi(q, \theta) = \text{const.}$ The local Mach number is defined by the formula

$$M = \frac{q}{a} = \left[a_0^2 \frac{1}{2} (k-1) q^2 \right]^{1/2}, \quad (1.9.19)$$

where a_0 is the speed of sound at rest, i. e., $a_0^2 = k R T_0$.

The application of Riemann's function to the solution of equation (1.7.7) is briefly discussed in¹⁵. The latter result does not differ essentially from the function introduced by Bergman in equation (7.4) of reference¹³.

¹⁵ S. Bergman: Methods for determination and computation of flow patterns of a compressible fluid. N. A. C. A., T. N. No. 1018 (1946).

If there are instances in which the whole flow is subsonic and therefore it is only necessary to consider particular solutions in this range, (as in the present section), then it is useful sometimes to consider certain other expressions which will be derived in the following. The procedure is based on the method of separation of variables. As these variables, (λ, θ) are employed, so that it becomes necessary to consider equation (1.2.4) with the function $f(\lambda)$ represented in the form $f(\lambda) =$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} C_n \exp(2n\lambda). \text{ Let}$$

$$\Psi^* = U_\nu \cos \nu \theta \quad (\text{or } U_\nu \sin \nu \theta), \quad (1.9.20)$$

where θ is bounded in a certain interval $(-L \leq \theta \leq L)$ and ν has the values

$$\nu = \nu^* L^{-1}, \quad \nu^* = 0, 1, 2, \dots \quad (1.9.21)$$

Below, we shall drop the subscript ν and let $U = U_\nu$; U will vary, of course, with the choice of ν , even though this is not indicated by the notation. Thus, we obtain for U the ordinary differential equation

$$U'' - \nu^2 U + 4F U = 0, \quad F = \frac{1}{4} f(\lambda). \quad (1.9.22)$$

The two independent solutions of (1.9.22) will be denoted by $U^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots$. Two cases must be distinguished, that is, whether ν is or is not an integer. In the latter case

$$U^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(1)} \exp[(\nu + 2n)\lambda], \quad (1.9.23a)$$

$$U^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(2)} \exp[(-\nu + 2n)\lambda], \quad (1.9.23b)$$

where $d_0^{(1)} = d_0^{(2)} = 1$, $d_1^{(1)} = -C_1(1 + \nu)^{-1}$, $d_1^{(2)} = -C_1(1 - \nu)^{-1}$, etc. The general formula for $d_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, and the coefficients C_n are given in¹¹ (pp. 37 and 75). In case ν is an integer, we have:

$$U^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(3)} \exp[(\nu + 2n)\lambda], \quad (1.9.24a)$$

$$U^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \{ \lambda s_n \exp[(\nu + 2n)\lambda] + d_n^{(4)} [\exp(-\nu + 2n)\lambda] \}. \quad (1.9.24b)$$

The convergence of the series (1.9.23) and (1.9.24) may be demonstrated as follows: Let

$$\exp(2\lambda) = z. \quad (1.9.25)$$

Then the half-plane $\text{Re}(\lambda) < 0$ corresponds to the circle $|z| < 1$. Since

$$\frac{dU}{d\lambda} = 2z \frac{dU}{dz}, \quad \frac{d^2U}{d\lambda^2} = 4z \left(z \frac{d^2U}{dz^2} + \frac{dU}{dz} \right), \quad (1.9.26)$$

the differential equation (1.9.22) may be written in the form

$$z^2 \frac{d^2U}{dz^2} + z \frac{dU}{dz} + \left(F - \frac{\nu^2}{4} \right) U = 0. \quad (1.9.27)$$

Since $F - \frac{\nu^2}{4}$ is a polynomial in z , the point $z = 0$ is a regular singular point (see Part 0.1) of the differential equation. The general solution of (1.9.27) may be expressed in the following form, provided ν is not an integer:

$$U = c_1 U_1 + c_2 U_2, \quad (1.9.28)$$

where c_1 and c_2 are arbitrary constants and

$$U_1 = z^{\nu/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n \right), \tag{1.9.29a}$$

$$U_2 = z^{\nu/2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^n \right), \tag{1.9.29b}$$

with α_n, β_n properly chosen constants. Since the only (finite) singular point of equation (1.9.27) is at $z = 0$, the series converges for all values of z , as the theory shows¹⁶. However, if ν is an integer, as in the case under consideration, the above-mentioned method fails; the series (1.9.29a) may be retained, but the series (1.9.29b) must be replaced by

$$U_2^* = U_1 \left\{ \sum_{n=0}^{\nu-1} \gamma_n z^{n-\nu} (n-\nu)^{-1} + \gamma_\nu \log z + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \gamma_n z^{n-\nu} (n-\nu)^{-1} \right\}, \tag{1.9.30}$$

where the γ_n are properly chosen constants. Therefore, in the case under consideration, the general solution of (1.9.27), valid for all z , will be of the form

$$U = c_1 U_1 + c_2 U_2^*. \tag{1.9.31}$$

It is seen that by replacing z by $\exp(2\lambda)$, (1.9.29a) and (1.9.30) will assume the forms given in (1.9.24); the factor λ in the first term of the series (1.9.24b) arises from the logarithmic term in (1.9.30). Since the expansions (1.9.29a) and (1.9.30) are valid for all z , in particular for $|z| < 1$, the expansion (1.9.24) will be valid for $|\exp(2\lambda)| < 1$; that is, $\text{Re}(\lambda) < 0$.

Part 2.

Simplified Pressure-Density Relation.

1. Definition of a series representing a stream-function Ψ^* regular in the whole half-plane.

The result of section I.6 was that the series for Ψ^* converged in an angular sector of the half-plane $\lambda < 0$. To extend the representation of Ψ^* beyond that domain by analytic continuation is possible but involves complicated computations. Moreover, the procedure employed so far has the disadvantage that the computation of the functions G_n is increasingly complicated as n increases, and that each G_n involves the previous G_m 's up to $m = n - 1$. So far, we have started with the isentropic relation, based on the equation of state of a perfect gas, and developed a representation that can only be carried out in practice with a certain approximation. We shall now reverse our method⁴. We shall begin with an approximate assumption concerning the physical function f , thus replacing it by another function \bar{f} , which leads to a simple mathematical representation for Ψ^* , instead of the stream-function Ψ^* , which function $\bar{\Psi}^*$ converges absolutely and uniformly at least in the half-plane $\lambda < 0$, i. e., in the whole subsonic region. The computation will now be relatively easy, while we shall have to justify our choice of \bar{f} by showing that the hypothetical gas thus described is sufficiently similar to a real gas. We begin with a function

$$\bar{f} = C \lambda^{-2}, \quad C > 0, \tag{2.1.1}$$

¹⁶ E. T. Copson: Functions of a complex variable. Oxford: The Clarendon Press. 1935.

instead of the function f as defined and computed in previous sections. Similarly, as in section I.6, we are now led to functions \bar{G}_n , such that

$$\bar{G}'_{n+1} = \bar{G}_n'' + C \lambda^{-2} \bar{G}_n, \quad (2.1.2)$$

$$\bar{G}_0 = 1, \quad \bar{G}_n(-\infty) = 0, \quad n > 0,$$

whence

$$\bar{G}_n = n! \mu_n (-\lambda)^{-n}. \quad (2.1.3)$$

The function U (1.6.1a) now takes the form:

$$\bar{U}(t; \lambda, \theta) = (2\lambda)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n n (Z-t)^{n-1} (2\lambda)^{-(n-1)}, \quad (2.1.4)$$

or as shown in section I.6:

$$\bar{U}(t; \lambda, \theta) = (2\lambda)^{-1} \frac{d}{dx} [H(\alpha, \beta, \gamma; x)], \quad (2.1.5)$$

where H is the hypergeometric series with α, β, γ from (1.6.5a) and $x = (2\lambda)^{-1}(Z-t)$. Hence:

$$\bar{U}(t; \lambda, \theta) = -\frac{d}{dt} [H(\alpha, \beta, \gamma; x)], \quad (2.1.6)$$

and the series for $\bar{\Psi}^*$ takes the form:

$$\bar{\Psi}^*(\lambda, \theta) = g_0(\lambda, \theta) - \operatorname{Re} \left\{ \int_0^Z \Phi_0(t) \frac{d}{dt} [H(\alpha, \beta, \gamma; x)] dt \right\}. \quad (2.1.7)$$

Since $g_0(\lambda, \theta) = \operatorname{Re}(\Phi_0(Z))$, equation (2.1.7) can, after some elementary transformations, be written

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}^* = & \operatorname{Re} \{ \Phi_0(Z) - \Phi_0(Z) H(\alpha, \beta, \gamma; 0) + \Phi_0(0) H[\alpha, \beta, \gamma; (2\lambda)^{-1}Z] + \\ & + \int_0^Z \Phi_0'(t) H[\alpha, \beta, \gamma; (2\lambda)^{-1}(Z-t)] dt \}. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

The considerations concerning the points of singularity of the hypergeometric series H show¹ that \bar{U} , and hence $\bar{\Psi}^*$, generated from the analytic function $\Phi_0(Z)$, are regular in the whole subsonic region. A further simplification can be obtained by the assumption $\Phi_0(0) = 0$ which leads⁴ to [with $H(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$]

$$\bar{\Psi}^* = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^Z \Phi_0'(t) H(\alpha, \beta, \gamma; x) dt \right\}. \quad (2.1.9)$$

If we start with a flow of an incompressible fluid, described by a stream-function $g_0(\lambda, \theta) = \operatorname{Re}[\Phi_0(Z)]$, the application of the operation (2.1.7) to $\Phi_0(Z)$ will lead to a corresponding flow pattern of the compressible fluid considered that will, in general, preserve the type of the original pattern. But while a change of $\Phi_0(Z)$ by an additive constant in the incompressible flow does not change the flow described at all, the addition of every such constant [see equation (2.1.8)] will lead to a different flow pattern in the compressible fluid flow. Among all the flows, corresponding to the same flow of an incompressible fluid, there exists one [characterized by the assumption $\Phi_0(0) = 0$] for which the particularly simple representation (2.1.9) is valid. This remark shows that the correspondence between incompressible and compressible flow patterns is by no means uniquely defined, and that the same generating procedure leads to an infinity of different compressible fluid stream-functions if we start from the same incompressible fluid flow. As remarked in section I.4, our procedure for finding solutions of the transformed Chaplygin's equation may be interpreted as

follows: One starts from a known flow pattern of an incompressible fluid and corrects it for the compressible case by applying the above operation to its stream-function $g_0(\lambda, \theta)$. This gives a certain distortion of this stream-function g_0 . It is important to get a measure for the magnitude of this distortion. We find a partial answer from (2.1.7). Since $g_0(\lambda, \theta) = \operatorname{Re} [\Phi_0(Z)]$, for a particular stream-function $g_0 = c$, equation (2.1.7) transforms into

$$\bar{\Psi}^* = c - c \operatorname{Re} \{H(\alpha, \beta, \gamma; x)\}_0^Z = c \operatorname{Re} \{H[\alpha, \beta, \gamma; (2\lambda)^{-1}Z]\}, \quad (2.1.10)$$

since $x|_0^Z = 0 - (2\lambda)^{-1}Z$, and $H(0) = 1$.

One sees that for large values of $|\lambda|$, i. e., small velocities, $\bar{\Psi}^*$ does not vary too much, but for smaller values of λ the deviation from constancy becomes appreciable. This particular Ψ^* might serve as a criterion for the distortion in dependence on λ .

2. The physical relations corresponding to the assumption $\bar{f} = C\lambda^{-2}$.

We have to study how far the hypothetical gas, described by the function \bar{f} , approximates the real one. A gas is described by a curve in the space of four variables, q, p, ϱ and M . It is sufficient to choose three of the six possible relations between these variables and we choose $M(\varrho)$, $q(\varrho)$ and $p(\varrho)$.

(a) The relation $M(\varrho)$.

In equation (1.2.5), written in the form $(s^{1/2})'' + f(\lambda)s^{1/2} = 0$ we substitute \bar{f} for f and therefore obtain for $s^{1/2}$ the following linear differential equation:

$$(s^{1/2})'' + C\lambda^{-2}s^{1/2} = 0. \quad (2.2.1)$$

The general solution of (2.2.1) is

$$s^{1/2} = \gamma_1 |\lambda|^{\delta_1} + \gamma_2 |\lambda|^{\delta_2}, \quad (2.2.2)$$

where the exponents δ_1, δ_2 are the solutions of the equation $\delta(\delta - 1) + C = 0$, i. e.

$$\delta_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} - C\right)^{1/2}. \quad (2.2.3)$$

In the particular case $C = 0$, we obtain $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$, i. e.,

$$s^{1/2} = \gamma_1 |\lambda| + \gamma_2. \quad (2.2.4)$$

We have at our disposal the two parameters γ_1 and γ_2 . Chaplygin³ had already realized that the equation (1.1.5) could be transformed into Laplace's equation if the $p - \varrho$ relation is assumed to be of the form $p = \alpha \varrho^{-1} + \beta$, and that in this case the whole theory of a compressible flow can be reduced to the well developed theory of an incompressible fluid flow. This approach was later considerably developed by von Kármán¹⁷ and Tsien¹⁸ and the assumption of a linear $p - \varrho^{-1}$ relation is known now as the Kármán-Tsien approximation. One easily finds in this case $s = \gamma$, i. e., a particular case of (2.2.4) with $\gamma_1 = 0$. Since this approximation is very useful over a wide range of λ , we shall henceforth also assume $\gamma_1 = 0$ in our improved approximation. This will simplify our computations considerably; but it should be kept in mind that, if necessary, we have at our disposal an additional parameter in

¹⁷ Th. von Kármán: Compressibility effects in aerodynamics. J. aeronaut. Sci. 8, 337—356 (1941).

¹⁸ H. S. Tsien: Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids. J. aeronaut. Sci. 6, 399—407 (1939).

order to obtain a better agreement between the hypothetical and the real gas. Hence, choosing $\gamma_1 = 0$ and dropping the indices, we have in (2.2.2)

$$s^{1/2} = \gamma |\lambda|^\delta, \quad \text{or} \quad -\lambda = s^{1/2\delta} \gamma^{-1/\delta}, \quad (2.2.5)$$

and

$$\frac{d\lambda}{d\varrho} = -(2\delta)^{-1} \gamma^{-1/\delta} s^{1/(2\delta)-1} \frac{ds}{d\varrho}. \quad (2.2.6)$$

On the other hand, equation (1.2.1) and the quantity s (section I.2) lead to $\frac{d\lambda}{dq} = \varrho q^{-1} s$. From the Bernoulli relation we have $q \frac{dq}{d\varrho} + \varrho^{-1} \frac{dp}{d\varrho} = 0$, and thus we derive $\frac{d\lambda}{d\varrho} = \frac{d\lambda}{dq} \frac{dq}{d\varrho} = -s q^{-2} \frac{dp}{d\varrho}$. Since $M = q \left(\frac{dp}{d\varrho} \right)^{-1/2} = (1 - s^2 \varrho^2)^{1/2}$, we obtain

$$\frac{d\lambda}{d\varrho} = -s M^{-2} = -s (1 - s^2 \varrho^2)^{-1}. \quad (2.2.7)$$

When we equate the right side of (2.2.6) and (2.2.7), the result obtained is

$$\frac{ds}{d\varrho} - 2\delta \gamma^{1/\delta} s^{2-1/(2\delta)} (1 - s^2 \varrho^2)^{-1} = 0. \quad (2.2.8)$$

This differential equation yields s as a function of ϱ , and because $M^2 = 1 - s^2 \varrho^2$, we can, from (2.2.8), compute $M(\varrho)$, i. e., one of our desired relations between the variables of the gas. However, the differential equation (2.2.8) cannot be solved in a closed form. It may be solved numerically. The extreme values of the interval $0 < \varrho s < 1$ correspond to the Mach numbers 1 and 0, respectively. The integral curves $s(\varrho)$, representing solutions of (2.2.8), increase monotonically in the subsonic region, because $1 - s^2 \varrho^2 > 0$, $\gamma^{1/\delta} > 0$, for positive s [equation (2.2.5)], and $\delta > 0$.

(b) The relation $q(\varrho)$.

In Bernoulli's relation $\frac{1}{2} q^2 + \int_{\varrho_0}^{\varrho} x^{-1} dp(x) = c_1$, we substitute $q^2 = M^2 \frac{dp}{d\varrho} = M^2 p'$, and obtain

$$\frac{1}{2} \varrho M^2 \varrho^{-1} p' + \int_{\varrho_0}^{\varrho} x^{-1} p'(x) dx = c_1. \quad (2.2.9)$$

Writing $J(\varrho)$ for $\int_{\varrho_0}^{\varrho} x^{-1} p'(x) dx$, we obtain the differential equation for $J(\varrho)$, $\frac{1}{2} M^2 J'(\varrho) \varrho + J(\varrho) = c_1$, leading to

$$J(\varrho) = c_1 - c_2 \exp \left[-2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} x^{-1} M(x)^{-2} dx \right]. \quad (2.2.10)$$

Since $\frac{1}{2} q^2 = c_1 - J(\varrho)$, we obtain

$$q^2 = 2c_2 \exp \left[-2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} x^{-1} M(x)^{-2} dx \right], \quad (2.2.11)$$

the desired relation $q(\varrho)$.

(c) The relation $p(\varrho)$.

Differentiating the quantity $J(\varrho)$ with respect to ϱ (which is $\varrho^{-1} p'$) and comparing the result so obtained with the derivative J' obtained from equation (2.2.10) gives us the expression for p' , which, when integrated, results in

$$p = 2c_2 \int_{\varrho_0}^{\varrho} M(x)^{-2} \exp \left[-2 \int_{\varrho_0}^x y^{-1} M(y)^{-2} dy \right] dx + c_3, \quad (2.2.12)$$

which is the desired relation $p(\varrho)$.

It should be noted that the integration of the differential equation (2.2.8) determines $M(\varrho)$ only up to a constant of integration. We may determine this constant by the requirement that the values $M = 0$ and $\varrho = 1$ shall correspond, which determines the units in which ϱ is measured. In formula (2.2.11), the value $\varrho_1 = 1$ of ϱ for which $M = 0$, is obviously of special interest. We shall show that $\int_{\varrho_0}^1 x^{-1} M(x)^{-2} dx$ is convergent, and this will imply that q is different from zero at $M = 0$. Therefore, since $M = q(p')^{-1/2}$, the velocity of sound, $a = (p')^{1/2}$, is infinite for $M = 0$, i. e. at $M = 0$ the gas behaves like an incompressible fluid.

We first study the behavior of $s(\varrho)$ at $\varrho = 1$. The proof presented below is the author's modification of the proof derived in⁴. We substitute

$$s = 1 + A_1(\varrho - 1)^{\varepsilon_1} + A_2(\varrho - 1)^{\varepsilon_1 + 1/2} + A_3(\varrho - 1)^{\varepsilon_1 + 1} + \dots, \quad 0 < \varepsilon_1, \quad (2.2.13)$$

with undetermined constants ε_1 and A_i , $i = 1, 2, \dots$. Then, with the application of the binomial theorem, we have:

$$s^{2-(2\delta)^{-1}} = 1 + [2 - (2\delta)^{-1}] A_1(\varrho - 1)^{\varepsilon_1} + [2 - (2\delta)^{-1}] A_2(\varrho - 1)^{\varepsilon_1 + 1/2} + \dots, \quad (2.2.14)$$

and

$$\frac{ds}{d\varrho} = \varepsilon_1 A_1(\varrho - 1)^{\varepsilon_1 - 1} + \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\right) A_2(\varrho - 1)^{\varepsilon_1 - 1/2} + \dots \quad (2.2.15)$$

Let

$$(1 - s^2 \varrho^2) = \{1 - s^2 [1 + 2(\varrho - 1) + (\varrho - 1)^2]\}, \quad (2.2.16)$$

so that applying the binomial theorem again gives the formula

$$\begin{aligned} (1 - s^2 \varrho^2) = & -2 A_1(\varrho - 1)^{\varepsilon_1} - 2(\varrho - 1) - A_1^2(\varrho - 1)^{2\varepsilon_1} - \\ & - 2 A_2(\varrho - 1)^{\varepsilon_1 + 1/2} - 2 A_3(\varrho - 1)^{\varepsilon_1 + 1} + \dots \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Substituting (2.2.14), (2.2.15) and (2.2.17) into (2.2.8) written in the form

$$\begin{aligned} (1 - s^2 \varrho^2) \frac{ds}{d\varrho} = & 2\delta \gamma^{1/\delta} s^{2-(2\delta)^{-1}} \text{ gives the equation:} \\ -2\varepsilon_1 A_1^2(\varrho - 1)^{2\varepsilon_1 - 1} - 2\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\right) A_1 A_2(\varrho - 1)^{2\varepsilon_1 - 1/2} - 2\varepsilon_1 A_1(\varrho - 1)^{\varepsilon_1} + \dots = \\ = & 2\delta \gamma^{1/\delta} \{1 + [2 - (2\delta)^{-1}] A_1(\varrho - 1)^{\varepsilon_1} + [2 - (2\delta)^{-1}] A_2(\varrho - 1)^{\varepsilon_1 + 1/2} + \dots\}. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

By comparing the smallest powers of $(\varrho - 1)$ on both sides, we obtain the condition

$$2\varepsilon_1 - 1 = 0, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \quad (2.2.19)$$

$$A_1^2 = -2\delta \gamma^{1/\delta}. \quad (2.2.19a)$$

By comparing the terms of the order $(\varrho - 1)^{1/2}$, we obtain

$$A_2 = -\delta \gamma^{1/\delta} [2 - (2\delta)^{-1}] - \frac{1}{2}, \text{ etc.} \quad (2.2.19b)$$

The coefficient A_1 is imaginary; it must be so since in the range $0 \leq M \leq 1$, $1 \geq \varrho > 0$, and consequently the expression $(\varrho - 1)^{1/2}$ is also imaginary. Hence we have:

$$s = 1 + A_1(\varrho - 1)^{1/2} + \text{higher powers of } (\varrho - 1). \quad (2.2.20)$$

From the equality $M^2 = 1 - s^2 \varrho^2$, we have M^2 given by (2.2.17), and from the expression for ϱ^2 in (2.2.16), we have

$$\varrho^{-1} M^{-2} = [1 - (\varrho - 1) + \dots] M^{-2} = -(2 A_1)^{-1} (\varrho - 1)^{-1/2} + \dots, \quad (2.2.21)$$

where the dots denote a series which is finite at the point $\varrho = 1$. Now we integrate (2.2.21), term by term, and obtain

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho} x^{-1} M^{-2}(x) dx = -A_1^{-1} [(\varrho - 1)^{1/2} - (\varrho_0 - 1)^{1/2}] + \dots, \quad (2.2.22)$$

which proves the convergence of the integral at the point $\varrho = 1$.

We come, therefore, to the result that the velocity q of our hypothetical gas is never zero, but has a minimum value q_{\min} corresponding to $M = 0$. In order to understand the meaning of this fact, consider at first a real gas coming from infinity with a finite speed upon an obstacle with a smooth boundary. The streamline $\Psi = 0$ which encloses this boundary will split up at a certain point of this boundary into two branches that reunite at another point of the boundary from which the streamline continues to infinity. From continuity considerations, we conclude that the velocity at the two branch points must be zero. Applying the same considerations to our hypothetical fluid, which does not permit zero velocities, we arrive at an apparent contradiction. Its solution lies in the fact that the fluid fans out a little before the body and closes in a little behind it so that the branch points of the streamline are the vertices of two cusps formed by the streamline. At the cusp points the velocity may obviously remain finite. If we consider, therefore, the flow of the real gas that is approximated by our hypothetical fluid, we may say that this approximation certainly breaks down in the region where the velocity becomes smaller than the minimum velocity. Here our hypothetical flow produces wakes that are only caused by the insufficient approximation. This fact is a serious weakness of this kind of approximation. It may, however, be kept less significant if we choose the constant δ so small that q_{\min} has a sufficiently small value. In this way we may improve the Kármán-Tsien method for higher Mach numbers without sacrificing too much in the approximation at the velocity zero.

3. Discussion of the obtained results.

In order to study the approximation to the real gas yielded by our theoretical assumption (2.1.1), we discuss the $M(\varrho)$ -, $q(\varrho)$ -, and $p(\varrho)$ -relations for a real gas, for a gas based on the Kármán-Tsien theory, and for two gases based on (2.1.1). Since s was an important auxiliary variable in our theory, we also include the relation $s(\varrho)$. To facilitate comparison, we choose the scale in the following so that we have at the point $M = 0$, $\varrho_0 = 1$ and $p_0 = 1$. This assumption leads to a scale for q also, by the use of the Bernoulli relation.

For the real gas, we then obtain the following relations:

$$p = \varrho^k = \varrho^{1.4}, \quad (2.3.1)$$

$$q^2 = 2k(k-1)^{-1}(1 - \varrho^{k-1}) = 7(1 - \varrho^{0.4}), \quad (2.3.2)$$

$$M^2 = 2(k-1)^{-1}(\varrho^{1-k} - 1) = 5(\varrho^{-0.4} - 1), \quad (2.3.3)$$

$$s^2 = (1 - M^2)\varrho^{-2} = 6\varrho^{-2} - 5\varrho^{-2.4}. \quad (2.3.4)$$

For the Kármán-Tsien approximation, we obtain the following corresponding equations:

$$p = -A\varrho^{-1} + (1 + A), \quad A > 0, \quad (2.3.1')$$

$$q^2 = A(\varrho^{-2} - 1), \quad (2.3.2')$$

$$M^2 = 1 - \varrho^2, \quad (2.3.3')$$

$$s = 1. \quad (2.3.4')$$

Now, starting with (2.1.1), we obtained (2.2.5) and (2.2.8). In view of the definition of s and our choice of scale, $M = 0$, $q_0 = 1$ imply $s_0 = 1$, which fixes the constant of integration. However, γ and δ are two parameters at our disposal. For the particular choice $\delta = 0$ and $\gamma = 1$ we obtain the Kármán-Tsien case considered above. It is obvious that the higher degree of freedom in the general case will lead to an improvement of the approximation. The integration of (2.2.8) was carried out in ⁴ for two different choices of the parameters γ and δ . In the first case, a small δ was chosen in order to stay in the neighborhood of the Kármán-Tsien approximation. In this way, we may study the improvement of the approximation under variation of δ . In the second case, the constant δ was chosen so that the asymptotic behavior of the hypothetical gas at Mach number 1 is that of a real isentropic gas. The equations connecting p , q , M and q are now the following:

$$M^2 = 1 - q^2 s^2, \quad (2.3.3'')$$

$$q^2 = q_0^2 \exp \left[-2 \int_1^q x^{-1} M(x)^{-2} dx \right], \quad (2.3.2'')$$

$$p = 1 + q_0^2 \int_1^q M(x)^{-2} \exp \left[-2 \int_1^x y^{-1} M(y) dy \right] dx. \quad (2.3.1'')$$

By integrating (2.2.8), we obtain s as a function of q , and, therefore, (2.3.1''), (2.3.2'') and (2.3.3'') give a representation of p , q , M as functions of q . The new arbitrary constant of integration, q_0 , defines the minimum velocity of the fluid.

A. In the first case, the value $\delta = \frac{1}{14}$ was chosen. Equation (2.2.8) then becomes

$$\frac{ds}{dq} = D s^{-5} (1 - s^2 q^2)^{-1}, \quad D = 2 \delta \gamma^{1/\delta} = \frac{1}{7} \gamma^{14}. \quad (2.3.5)$$

Substituting $L = s^2$, we obtain

$$\frac{dL}{dq} = 2 D L^{-2} (1 - q^2 L)^{-1}. \quad (2.3.6)$$

This equation may be integrated numerically. In order to get a good agreement for smaller Mach numbers, the constant D may be chosen to be equal to 0.105. The constant q_0^2 in (2.3.2'') may be chosen more or less arbitrarily; to provide for a small value of the minimal velocity q_0 one may take $q_0 = 0.265$.

B. To obtain a model gas that behaves like a real one at the point $M = 1$, we replace $(1 - M^2)^{1/2}$ by T and obtain from (2.3.3) and (2.3.4) in the case of a real gas

$$q = \left[\frac{1}{2} (k + 1) - \frac{1}{2} (k - 1) T^2 \right]^{-\frac{1}{k-1}}, \quad (2.3.7)$$

$$s = T q^{-1} = T \left[\frac{1}{2} (k + 1) - \frac{1}{2} (k - 1) T^2 \right]^{\frac{1}{k-1}}. \quad (2.3.8)$$

On the other hand, we derive from (1.3.13)

$$\lambda = \frac{1}{3} (h^2 - 1) T^3 + \dots, \quad h^2 = \frac{1}{6}. \quad (2.3.9)$$

Hence, we have for small values of λ the development

$$T = \left[\frac{1}{3} (1 - h^2) \right]^{-1/2} |\lambda|^{1/3} + \dots, \quad (2.3.10)$$

and substituting this in (2.3.8), we obtain

$$s = \left[\frac{1}{3} (1 - h^2) \right]^{-1/2} |\lambda|^{1/3} \left[\frac{1}{2} (k + 1)^{\frac{1}{k-1}} + \dots \right] = K |\lambda|^{1/3} + \dots \quad (2.3.11)$$

If we want to obtain in (2.2.5) a choice of parameters that leads to the asymptotic behavior of the real gas for $M = 1$, i. e., $\lambda = 0$, a comparison of (2.2.5) with (2.3.11) suggests the value $\delta = \frac{1}{6}$. For this value of δ , (2.2.8) takes the form

$$\frac{ds}{dq} = D s^{-1} (1 - s^2 q^2)^{-1}, \quad (2.3.12)$$

or, substituting again $L = s^2$,

$$\frac{dL}{dq} = 2 D (1 - L q^2)^{-1}. \quad (2.3.13)$$

If we fix γ so that $D = \frac{1}{3} \gamma^6 = 0,606$, this choice leads to curves that fit the corresponding curves for a real gas quite well for higher Mach numbers. In this case the minimum velocity q_0 ought to be chosen greater ($= 0,471$), in order to get a good correspondence near $M = 1$. The reader can find in ⁴ a set of curves for the two cases discussed.

(Eingegangen am 2. Januar 1952.)

(Aus dem Institut für Angewandte Physik an der Technischen Hochschule Wien und der Abteilung für Elektronenoptik der Siemens und Halske A. G., Berlin-Siemensstadt.)

Die Aberrationskonstanten des elektronenoptischen Abbildungssystems ohne Blende.

Von W. Glaser und H. Grömm.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die allgemeinen Formeln der Aberrationskoeffizienten eines rotations-symmetrischen, elektronenoptischen Systems werden im Hinblick auf die Anwendung bei der Elektronenmikroskopie für ein System ohne Blende hergeleitet. Ihr expliziter Verlauf für ein typisches magnetisches Polschuhfeld wird als Funktion der Linienstärke dargestellt. Die Ergebnisse werden dazu verwendet, um die Größe des Zerstreuungsscheibchens in der Gaußschen Bildebene zu bestimmen, das durch das Zusammenwirken der hier bestimmten Bildfehler entsteht.

Summary. The general formulae concerning the aberration coefficients of a rotation-symmetrical, electron-optical system are evolved for a system without diaphragm in view of its use in electronic microscopy. Its explicit development for a typical magnetic pole-shoe field is presented as a function of the strength of lens. The results are employed for determining the size of the disc of confusion in the Gaussian image plane resulting from the aberrations determined in this manner.

Résumé. Les formules générales du coefficient d'aberration d'un système optique-électronique à symétrie de révolution sont développées pour un système sans diaphragme en vue d'une utilisation dans la microscopie électronique. Le développement explicite d'un champ typique, magnétique avec pièces polaires est présenté comme fonction de la puissance de la lentille. On emploie les résultats pour déterminer la grandeur du disque de confusion dans le plan d'image de Gauss qui se forme par la coopération des défauts de l'image déterminés de cette façon.

In der Lichtoptik wird das abbildende Strahlenbündel in der Regel durch eine materielle Blende bestimmt. Bei der Berechnung der Aberrationserscheinungen legt man daher die einzelnen Strahlen des Bündels zweckmäßigerweise durch ihre Durchstoßpunkte durch die Blendenebene fest. Auch in der Elektronenoptik kann man die einzelnen Strahlen im Prinzip auf diese Weise festlegen („Abbildungssystem mit Blende“). Die tatsächliche Begrenzung des abbildenden Bündels erfolgt jedoch bei wichtigen elektronenoptischen Geräten (Elektronenmikroskop) nicht durch eine materielle Blende, sondern sie ergibt sich aus dem natürlichen Intensitätsabfall im Bündel. Dieser Intensitätsabfall wird durch den Elektronenstrahler und durch die Streueffekte im Objekt bedingt. Vom Objekt aus tritt also ein kegelförmiges Elektronenbündel, in dem die Intensität mit der Entfernung von der Bündelachse

rasch abfällt, in das Abbildungssystem ein. Es ist notwendig, die Strahlen im Bündel in einer Weise festzulegen, die diesen Verhältnissen entspricht. Bereits in einer früheren Arbeit¹ wurde ohne Beweis von den Aberrationskoeffizienten dieses „blendenfreien Systems“ Gebrauch gemacht. Die Herleitung wird in Abschnitt 2 und 3 der vorliegenden Arbeit ausführlich gegeben. Dabei wird auch der Fall berücksichtigt, daß das Objekt im abbildenden Magnetfeld liegt, wie das bei hohen Vergrößerungen der Fall ist.

Bei der numerischen Auswertung ist die Berechnung der Bildfehlerkoeffizienten im System mit Blende einfacher als im System ohne Blende. Für das System mit Blende lassen sie sich außerdem für ein typisches Polschuhfeld streng auswerten. Wir haben daher in Abschnitt 1 kurz über die Bildfehlerkoeffizienten im System mit Blende referiert und im Abschnitt 4 die numerischen Werte dieser Koeffizienten für das Glockenfeld angegeben. Nach den in Abschnitt 2 und 3 abgeleiteten Formeln können daraus die Zahlenwerte der Bildfehlerkoeffizienten für das blendenfreie System bestimmt werden. Dies ist im 5. Abschnitt geschehen.

Das geometrisch-optische Auflösungsvermögen wird durch die größte Ausdehnung des Zerstreuungsfleckes bestimmt, der bei der Abbildung eines Objektpunktes durch das betrachtete Abbildungssystem in der Gaußschen Bildebene entworfen wird. Liegt der Objektpunkt auf der optischen Achse und stimmt die Achse des von ihm ausgehenden kegelförmigen Elektronenbündels mit der optischen Achse überein, so ist die Zerstreuungsfigur allein durch die sphärische Aberration bedingt. Liegt der Objektpunkt außerhalb der optischen Achse (aber noch im Seidelschen Bereich) und schneidet die Bündelachse die optische Achse unter einem bestimmten „Dezentrierungswinkel“, so wird der Zerstreuungsfleck durch das Hinzutreten der anderen Bildaberrationen vergrößert und damit das Auflösungsvermögen verschlechtert. Im 6. Abschnitt dieser Arbeit wird der Einfluß der Dezentrierung auf das geometrisch-optische Auflösungsvermögen, gestützt auf die numerischen Ergebnisse der früheren Abschnitte, bestimmt.

1. Die Bildfehlerkoeffizienten beim Abbildungssystem mit Blende.

Die einzelnen Strahlen des abbildenden Elektronenbündels sollen durch Dingpunkt $P_0(z_0, x_0, y_0)$ und Durchstoßpunkt durch eine Blendenebene $P_B(z_B, x_B, y_B)$ festgelegt werden. Die Gaußschen Strahlen vereinigen sich in einem stigmatischen Bild $P_1(z_1, x_1, y_1)$ des Dingpunktes, wobei

$$x_1 = V x_0; \quad y_1 = V y_0. \quad (1)$$

Die Seidelschen Strahlen durchstoßen die Gaußsche Bildebene $z = z_1$ in davon abweichenden Punkten $\bar{P}(z_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Die Abweichungen ihrer Durchstoßpunkte vom Gaußschen Bildpunkt betragen:

$$\Delta x_1 = \bar{x}_1 - V x_0; \quad \Delta y_1 = \bar{y}_1 - V y_0. \quad (2)$$

Wir dividieren diese Abweichungen durch die Vergrößerung und beziehen sie damit auf die Dingebene $z = z_0$. Die sich so ergebenden Abweichungen

$$\delta x = \Delta x_1 / V; \quad \delta y = \Delta y_1 / V \quad (3)$$

charakterisieren die geometrisch-optischen Bildfehler. Die Aberrationen δx und δy sind bereits früher in allgemeiner Form angegeben worden² und lassen sich in folgender Gestalt schreiben:

¹ W. Glaser: Österr. Ingenieur-Arch. 3, 39 (1948).

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= B_a x_B (x_B^2 + y_B^2) + F_a (3 x_B^2 + y_B^2) x_0 + 2 f_a x_B y_B x_0 + \\ &\quad + (2 C_a + D_a) x_B x_0^2 + c_a y_B x_0^2 + E_a x_0^3, \\ \delta y &= B_a y_B (x_B^2 + y_B^2) + 2 F_a x_B y_B x_0 + f_a (x_B^2 + 3 y_B^2) x_0 + \\ &\quad + D_a y_B x_0^2 + c_a x_B x_0^2 + e_a x_0^3. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die „Bildfehlerkoeffizienten“ B_a, F_a, \dots, e_a stellen bestimmte Integralausdrücke dar, in die außer den Größen des elektrisch-magnetischen Abbildungsfeldes noch zwei spezielle Gaußsche Bahnen $g(z)$ und $h(z)$ eingehen, die den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} g(z_0) &= 1; & h(z_0) &= 0, \\ g(z_B) &= 0; & h(z_B) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

genügen.

Wir werden in Abschnitt 4 die Bildfehlerkoeffizienten für das magnetische Glockenfeld numerisch angeben. Dabei werden wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß die Blende in der Feldmitte liegt. Es ist aber, wie früher² gezeigt wurde, nicht schwer, die Bildfehlerkoeffizienten, wenn sie einmal für eine bestimmte Blendelage $z = z_B$ bekannt sind, auf eine neue Blendelage umzurechnen, die wir mit $z = \bar{z}_B$ bezeichnen wollen. Mit den Bahnen $g(z)$ und $h(z)$ lassen sich nach (5) die Gaußschen Bahnen in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cdot g(z) + x_B \cdot h(z), \\ y &= y_B \cdot h(z) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

schreiben. Hierbei wurde $y_0 = 0$ gesetzt, was keine Einschränkung der Allgemeinheit unserer Betrachtungen darstellt. Für $z = \bar{z}_B$ geht (6) über in

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_B &= x_0 \cdot g(\bar{z}_B) + x_B \cdot h(\bar{z}_B), \\ \bar{y}_B &= y_B \cdot h(\bar{z}_B). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Auflösung nach x_B und y_B sowie Einführung der Abkürzungen

$$\lambda_1 = \frac{1}{h(\bar{z}_B)}; \quad \mu_1 = \frac{g(\bar{z}_B)}{h(\bar{z}_B)} \quad (8)$$

führt auf die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} x_B &= \lambda_1 \bar{x}_B - \mu_1 x_0, \\ y_B &= \lambda_1 \bar{y}_B. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Da die Bildfehlerkoeffizienten außer von den Feldgrößen nur von den Bahnen erster Ordnung $g(z)$ und $h(z)$ abhängen, genügt die lineare Beziehung (9) zwischen alten und neuen Blendenkoordinaten als Transformationsformel. Wir setzen nun (9) in (4) ein und erhalten völlig analoge Ausdrücke, und zwar in den neuen Blendenkoordinaten \bar{x}_B und \bar{y}_B . Dabei ergibt sich der Zusammenhang zwischen den früheren Bildfehlerkoeffizienten B_a, F_a, \dots, e_a und den neuen, auf \bar{z}_B bezogenen in folgender Weise:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B} &= \lambda_1^3 B_a; & \bar{F} &= \lambda_1^2 (F_a - \mu_1 B_a); & \bar{C} &= \lambda_1 (C_a - 2\mu_1 F_a + \mu_1^2 B_a); \\ \bar{D} &= \lambda_1 (D_a - 2\mu_1 F_a + \mu_1^2 B_a); & \bar{E} &= E_a - \mu_1 (2C_a + D_a) + 3\mu_1^2 F_a - \mu_1^3 B_a; \\ \bar{f} &= \lambda_1^2 f_a; & \bar{c} &= \lambda_1 (c_a - 2\mu_1 f_a); & \bar{e} &= e_a - \mu_1 c_a + \mu_1^2 f_a. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

² W. Glaser: Z. Physik 83, 104 (1933).

2. Die Paraxialbahnen im blendenfreien System.

Der Strahlengang im Elektronenmikroskop ist in der Regel durch keine materielle Blende begrenzt. Seine Apertur ist in erster Linie durch die Brechkraft der Kondensorlinse bestimmt. Es ist daher zweckmäßig, die einzelnen Strahlen des abbildenden Bündels nicht durch die Durchstoßpunkte $P_B(z_B, x_B, y_B)$ durch eine Blenden-ebene $z = z_B$ festzulegen, sondern durch Parameter, die dem „blendenfreien“ Abbildungssystem besser angepaßt sind. Wir wählen als Parameter Winkel, die die einzelnen Strahlen mit einer vorgegebenen Anfangsrichtung eines mittleren Strahles im Bündel einschließen. Wir haben dabei zu beachten, daß sich die Darstellung

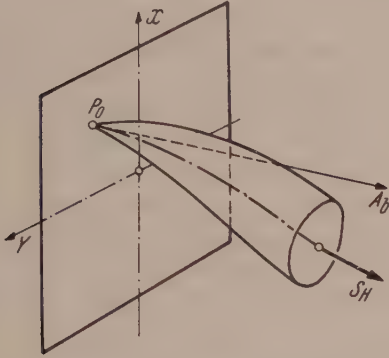


Abb. 1. Bündelachse A_b und Hauptstrahl S_H eines vom Objekt aus ins Abbildungssystem eintretenden Elektronenbündels.

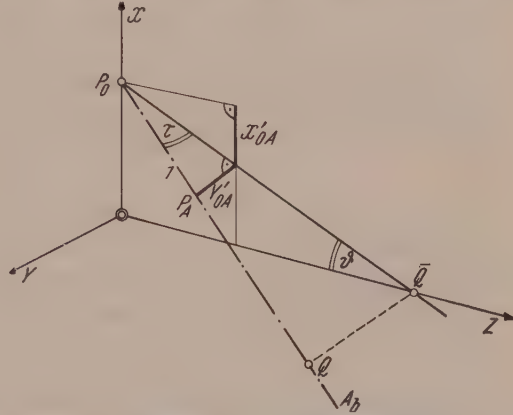


Abb. 2. Festlegung der Bündelachse A_b durch die Winkel ϑ und τ .

der Elektronenbahnen in der Gestalt (6) auf ein Koordinatensystem (x, y, z) bezieht, das gegenüber dem „raumfesten“ System (X, Y, z) um die von z abhängigen Winkel

$$\Theta(z) = \sqrt{\frac{e}{8m}} \int_{z_0}^z \frac{B_z(z)}{\Phi(z)} dz \quad (11)$$

verschraubt ist³.

Vom Dingpunkt P_0 geht ein kegelförmiges Elektronenbündel aus (Abb. 1). Die allgemeine Richtung des Bündels ist bestimmt durch die Richtung eines mittleren Strahles, den wir als Hauptstrahl S_H bezeichnen. Die Tangente A_b an den Hauptstrahl im Dingpunkt P_0 wollen wir als Bündelachse bezeichnen. Zur Festlegung der Bündelachse im raumfesten System (X, Y, z) gehen wir folgendermaßen vor. Die X -Achse möge, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet, durch den Dingpunkt P_0 gehen ($X_0 \neq 0$; $Y_0 = y_0 = 0$). Wir projizieren die Bündelachse auf die Meridianebene (X - z -Ebene). Die Projektion $P_0 \bar{Q}$ schließt mit der optischen Achse den Winkel ϑ , die Bündelachse mit der Projektion $P_0 \bar{Q}$ den Winkel τ ein. Durch die drei Größen X_0 , ϑ und τ ist die Bündelachse festgelegt (Abb. 2). Ist $\tau = 0$, so liegt die Bündelachse in der Meridianebene (der Hauptstrahl ist dann ein Meridianstrahl) und der Winkel ϑ kennzeichnet die Neigung der Bündelachse gegen die optische Achse. Ist $\tau \neq 0$, so haben wir einen „windschiefen“ Hauptstrahl, so daß τ das Ausmaß der windschiefen Lage kennzeichnet.

Nun bestimmen wir die Richtungskosinus der Bündelachse im System (X, Y, z) . Da wir die folgenden Umrechnungen mit Benützung der achsennahen Bahnen durch-

³ Vgl. W. Glaser: Z. Physik 97, 177 (1935).

führen können, sind diese durch X_{0A}' und Y_{0A}' gegeben, wobei X_{0A}' die Ableitung des Hauptstrahls im Punkte $z = z_0$ bedeutet. In Abb. 2 hat der Punkt P_A auf der Bündelachse von P_0 den Abstand Eins. Seine Koordinaten in bezug auf P_0 stellen

also die Richtungskosinus der Bündelachse dar. Man liest aus der Abbildung unmittelbar die Beziehungen ab:

$$\left. \begin{aligned} X_{0A}' &= -\sin \vartheta \cos \tau, \\ Y_{0A}' &= \sin \tau. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die einzelnen Strahlen des Bündels können nun in bezug auf die Bündelachse durch die Winkel γ und ψ festgelegt werden (Abb. 3). Der Winkel γ liegt zwischen dem betrachteten Strahl und der Bündelachse. Wenn wir uns durch P_A eine Ebene senkrecht zur optischen Achse gelegt denken, so ist ψ der Winkel, den der Radiusvektor $P_A P$ mit der Parallelen zur X-Achse in P_A einschließt.

Abb. 3. Festlegung eines beliebigen Strahls $P_0 P$ in bezug auf die Bündelachse A_b durch die Winkel γ und ψ .

Da wir uns auf ein Bündel geringer Öffnung $\sin \gamma = \gamma$ beschränken können, ist auch die Entfernung $P_0 P$ gleich Eins zu setzen. Die Koordinaten von P , das heißt die Richtungskosinus des betrachteten Strahles, sind mit (12) gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} X_0' &= X_{0A}' + \gamma \cos \psi = -\sin \vartheta \cos \tau + \gamma \cos \psi, \\ Y_0' &= Y_{0A}' + \gamma \sin \psi = \sin \tau + \gamma \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Mittels der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos \Theta - y \sin \Theta, \\ Y &= x \sin \Theta + y \cos \Theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

gehen wir jetzt zum verschraubten System (x, y, z) über. Der Drehwinkel $\Theta(z)$ ist dabei durch (11) gegeben. Hieraus folgt für die Dingebene $z = z_0$:

$$X_0 = x_0; \quad Y_0 = y_0 = 0 \quad (15)$$

und

$$X_0' = x_0' - y_0 \Theta_0'; \quad Y_0' = y_0' + x_0 \Theta_0', \quad (16)$$

wobei Θ_0' durch

$$\Theta'(z_0) = \sqrt{\frac{e}{8m}} \frac{B_z(z_0)}{\sqrt{\Phi(z_0)}} \quad (17)$$

gegeben ist.

Sind $s(z)$ und $t(z)$ jene Gaußschen Bahnen, welche den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} s(z_0) &= 1; & t(z_0) &= 0, \\ s'(z_0) &= 0; & t'(z_0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

genügen, so ist das vom Dingpunkt $P_0(x_0, 0)$ ausgehende Elektronenbündel durch

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cdot s(z) + x_0' \cdot t(z), \\ y &= y_0' \cdot t(z) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

dargestellt. Um die Strahlen durch die neuen Parameter ϑ , τ , γ und ψ festzulegen, haben wir x_0' und y_0' aus (16) zu entnehmen und für X_0' und Y_0' aus (13) einzusetzen.

Bezeichnen wir (Abb. 3) die Abszisse des Durchstoßpunktes der Bündelachse mit der y - z -Ebene mit z_s und setzen wir

$$z_s - z_0 = l, \quad (20)$$

so ist

$$x_0 = l \operatorname{tg} \vartheta. \quad (21)$$

Da wir achsennahe Bahnen betrachten, haben wir $\operatorname{tg} \vartheta \approx \sin \vartheta \approx \vartheta$ und $\sin \tau \approx \tau$ bzw. $\cos \tau \approx 1$ zu setzen. Wir erhalten so mit (13), (16) und (19):

$$\begin{aligned} x &= \vartheta [l s(z) - t(z)] + t(z) \cdot \gamma \cos \psi, \\ y &= -\vartheta \cdot t(z) l \Theta_0' + t(z) \cdot \gamma \sin \psi + t(z) \tau. \end{aligned} \quad (22)$$

Von diesem Bündel achsennaher Elektronenbahnen, dessen Bündelachse durch l , ϑ und τ und dessen einzelne Strahlen im Bündel durch γ und ψ festgelegt sind, werden wir in den folgenden Betrachtungen auszugehen haben.

3. Die Bildfehlerkoeffizienten für das blendenfreie System.

Im Abschnitt 1 haben wir die Bildfehler dritter Ordnung δx_1 und δy_1 durch den Achsenabstand des Dingpunktes x_0 und den Blendendurchstoßpunkt P_B ausgedrückt. Da im blendenfreien System jeder Strahl durch γ und ψ festgelegt ist, haben wir die Bildfehler als Funktion dieser Parameter darzustellen. Wir wollen diesen Übergang in zwei Schritten vollziehen. Dazu sollen die Abweichungen zuerst statt durch x_B und y_B durch x_0' und y_0' (Ausgangsrichtung des Strahles) ausgedrückt werden. Aus (6) erhalten wir durch Differenzieren und Auflösung nach x_B und y_B für $z = z_0$:

$$x_B = \frac{1}{h_0'} x_0' - \frac{g_0'}{h_0'} x_0; \quad y_B = \frac{1}{h_0'} y_0'. \quad (23)$$

Wir setzen

$$\kappa = \frac{1}{h_0'}; \quad \lambda = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)} \quad (24)$$

und erhalten (23) in der Gestalt

$$\begin{cases} x_B = \kappa x_0' - \lambda x_0, \\ y_B = \kappa y_0'. \end{cases} \quad (25)$$

Wenn wir (25) in (4) einsetzen und die entstehenden Glieder entsprechend ordnen, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \delta x_1 &= B_r (x_0'^2 + y_0'^2) x_0' + [F_r (3 x_0'^2 + y_0'^2) + 2 f_r x_0' y_0'] x_0 + \\ &\quad + [(2 C_r + D_r) x_0' + c_r y_0'] x_0^2 + E_r x_0^3, \\ \delta y_1 &= B_r (x_0'^2 + y_0'^2) y_0' + [2 F_r x_0' y_0' + f_r (x_0'^2 + 3 y_0'^2)] x_0 + \\ &\quad + (D_r y_0' + c_r x_0') x_0^2 + e_r x_0^3, \end{aligned} \quad (26)$$

wobei sich die neuen Koeffizienten B_r, F_r, \dots, e_r folgendermaßen durch die Bildfehlerkoeffizienten B_a, F_a, \dots, e_a ausdrücken:

$$\begin{cases} B_r = \kappa^3 B_a; & F_r = \kappa^2 (F_a - \lambda B_a); & C_r = \kappa (C_a - 2 \lambda F_a + \lambda^2 B_a); \\ D_r = \kappa (D_a - 2 \lambda F_a + \lambda^2 B_a); & E_r = E_a - \lambda (2 C_a + D_a) + 3 \lambda^2 F_a - \lambda^3 B_a; \\ f_r = \kappa^2 f_a; & c_r = \kappa (c_a - 2 \lambda f_a); & e_r = e_a - \lambda c_a + \lambda^2 f_a. \end{cases} \quad (27)$$

Nach (22) und (18) besteht zwischen x_0', y_0' und unseren Strahlparametern γ, ψ, ϑ und τ der Zusammenhang

$$\begin{cases} x_0' = \gamma \cos \psi - \vartheta, \\ y_0' = \gamma \sin \psi + \tau - \vartheta l \Theta_0'. \end{cases} \quad (28)$$

Indem wir zur Abkürzung

$$\frac{\vartheta l \Theta_0' - \tau}{x_0} = \bar{\vartheta} \quad (29)$$

eingeführen, schreiben wir diese Beziehung unter Berücksichtigung von $x_0 = \vartheta l$ in der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} x_0' &= \gamma \cos \psi - \vartheta, \\ y_0' &= \gamma \sin \psi - l \bar{\vartheta} \cdot \bar{\vartheta}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Diese Transformationsgleichung haben wir in (26) einzusetzen, um die Aberrationen des blendenfreien Systems zu erhalten. Wir schreiben

$$\left. \begin{aligned} \delta x_1 &= B_{sa} \gamma^3 \cos \psi + [F_{sa} (2 + \cos 2\psi) + f_{sa} \sin 2\psi] \cdot \gamma^2 \bar{\vartheta} + \\ &\quad + [(2 C_{sa} + D_{sa}) \cos \psi + c_{sa} \sin \psi] \cdot \gamma \bar{\vartheta}^2 + E_{sa} \bar{\vartheta}^3, \\ \delta y_1 &= B_{sa} \gamma^3 \sin \psi + [F_{sa} \sin 2\psi + f_{sa} (2 - \cos 2\psi)] \cdot \gamma^2 \bar{\vartheta} + \\ &\quad + [D_{sa} \sin \psi + c_{sa} \cos \psi] \cdot \gamma \bar{\vartheta}^2 + e_{sa} \bar{\vartheta}^3, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

wobei wir gesetzt haben

$$\left. \begin{aligned} B_{sa} &= B_r; \quad F_{sa} = (F_r l - B_r); \\ C_{sa} &= (C_r l^2 - 2 F_r l + B_r) + l^2 (2 f_r - B_r \bar{\vartheta}) \bar{\vartheta}; \\ D_{sa} &= (D_r l^2 - 2 F_r l + B_r) - 3 l^2 (2 f_r - B_r \bar{\vartheta}) \bar{\vartheta}; \\ E_{sa} &= [E_r l^3 - (2 C_r + D_r) l^2 + 3 F_r l - B_r] - l^2 (c_r l - 2 f_r) \bar{\vartheta} + l^2 (F_r l - B_r) \bar{\vartheta}^2; \\ f_{sa} &= l (f_r - B_r \bar{\vartheta}); \quad c_{sa} = l (c_r l - 2 f_r) - 2 l (F_r l - B_r) \bar{\vartheta}; \\ e_{sa} &= l (e_r l^2 - c_r l + f_r) - l (D_r l^2 - 2 F_r l + B_r) \bar{\vartheta} + l^3 (3 f_r - B_r \bar{\vartheta}) \bar{\vartheta}^2. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Durch Elimination der Zwischenkoeffizienten B_r, F_r, \dots, e_r aus (27) können wir die Bildfehler des blendenfreien Systems $B_{sa}, F_{sa}, \dots, e_{sa}$ unmittelbar durch die auf die Blende bezogenen Bildfehler B_a, F_a, \dots, e_a ausdrücken. Mit der Abkürzung

$$\lambda + \frac{\kappa}{l} = \frac{g_0' l + 1}{l h_0'} = \sigma \quad (33)$$

erhalten wir endgültig⁴:

$$\left. \begin{aligned} B_{sa} &= \kappa^3 B_a; \quad F_{sa} = \kappa^2 l (F_a - \sigma B_a); \\ C_{sa} &= \kappa l^2 (C_a - 2 \sigma F_a + \sigma^2 B_a + 2 f_a \bar{\vartheta} \kappa - \kappa^2 B_a \bar{\vartheta}^2); \\ D_{sa} &= \kappa l^2 (D_a - 2 \sigma F_a + \sigma^2 B_a - 6 f_a \bar{\vartheta} \kappa + 3 \kappa^2 B_a \bar{\vartheta}^2); \\ E_{sa} &= l^3 [E_a - \sigma (2 C_a + D_a) + 3 \sigma^2 F_a - \sigma^3 B_a - \kappa \bar{\vartheta} (c_a - 2 \sigma f_a) + \\ &\quad + \kappa^2 \bar{\vartheta}^2 (F_a - \sigma B_a)]; \\ f_{sa} &= \kappa^2 l (f_a - \kappa \bar{\vartheta} B_a); \quad c_{sa} = \kappa l^2 [c_a - 2 \sigma f_a - 2 \kappa \bar{\vartheta} (F_a - \sigma B_a)]; \\ e_{sa} &= l^3 [e_a - \sigma c_a + \sigma^2 f_a - \kappa \bar{\vartheta} (D_a - 2 \sigma F_a + \sigma^2 B_a) + \kappa^2 \bar{\vartheta}^2 (3 f_a - \kappa \bar{\vartheta} B_a)]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Es ist zu beachten, daß die Bildfehlerkoeffizienten hier bereits durch die Vergrößerung dividiert sind, also auf die Dingebene bezogen wurden. Ist die Bündelachse nicht

⁴ Die früher¹ verwendeten Formeln gehen daraus hervor, wenn man auf den rein elektrischen Fall spezialisiert oder annimmt, daß das Objekt im feldfreien Raum liegt. Außerdem muß vorausgesetzt werden, daß die Bündelachse die optische Achse schneidet. Mit $\Theta_0' = 0$ und $\tau = 0$ hat man dann in (34) $\bar{\vartheta} = 0$ zu setzen.

windschief zur optischen Achse, so ist speziell $\tau = 0$ und nach (29) bedeutet dann in den Formeln (34) $\bar{\vartheta} = \Theta_0'$. Wenn die Bündelachse außerdem parallel zur optischen Achse ist, so hat man in (31) $\vartheta = x_0/l$ einzusetzen und den Grenzübergang $\vartheta \rightarrow 0$, also $l \rightarrow \infty$ durchzuführen. Hierbei wird nach (33) $\sigma = \lambda$ und in (32) bleiben nur die Koeffizienten mit der höchsten Potenz von l . Die Koeffizienten $B_{sa}, F_{sa}, \dots, e_{sa}$ stimmen dann mit den Koeffizienten B_r, F_r, \dots, e_r überein, wenn man von den nichtverschwindenden Gliedern mit $\bar{\vartheta} = \Theta_0'$ absieht.

4. Die Bildfehlerkoeffizienten des Glockenfeldes für das System mit Blende.

Für die Anwendungen ist es wichtig, die Bildfehlerkoeffizienten für ein Abbildungsfeld kennenzulernen, das den Feldverlauf in den gebräuchlichen Polschuhobjektiven gut wiedergibt. Ein derartiges Feld ist das Glockenfeld

$$B_z(z) = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z}{d}\right)^2}, \tag{35}$$

Tabelle 1. Bildfehlerkoeffizienten des Systems mit Blende.
(Glockenfeld, hohe Vergrößerung, Blende in Feldmitte. Die Größe d bedeutet die Halbwertsbreite. Die Koeffizienten sind bereits durch die Vergrößerung dividiert.)

k^2	d^2B_a	d^2C_a	d^2D_a	d^2E_a	d^2F_a
0.2	0.4115	— 0.0273	0.1601	— 0.0130	— 0.0011
0.4	0.6357	— 0.1022	0.6060	— 0.0923	+ 0.0301
0.6	0.9294	— 0.1898	1.3160	— 0.2907	0.1343
0.8	1.4012	— 0.2328	2.3125	— 0.6691	0.3621
1.0	2.0805	— 0.1442	3.658	— 1.3045	0.7885
1.2	3.147	+ 0.2238	5.592	— 2.4165	1.556
1.4	4.9044	1.1512	8.404	— 4.274	2.944
1.6	7.977	3.220	12.83	— 7.553	5.535
1.8	13.76	7.768	20.43	— 13.73	10.65
2.0	25.81	18.24	35.09	— 26.51	21.72
2.2	54.75	45.07	68.09	— 56.94	48.98
2.4	140.6	128.3	161.5	— 146.4	131.8
2.6	515.0	500.0	553.3	— 532.1	499.1
2.8	4473.0	4473.0	4578.0	— 4652.0	4435.0
3.0			unendlich		

k^2	d^2c_a	d^2e_a	d^2f_a
0.2	— 0.0311	0.0329	0.0867
0.4	— 0.1691	0.1704	0.2617
0.6	— 0.4578	0.4292	0.5115
0.8	— 0.9480	0.8161	0.8534
1.0	— 1.797	1.354	1.316
1.2	— 2.883	2.095	1.958
1.4	— 4.662	3.143	2.887
1.6	— 7.422	4.681	4.280
1.8	— 11.91	7.102	6.508
2.0	— 19.71	11.20	10.35
2.2	— 34.65	18.92	17.70
2.4	— 68.12	36.03	34.18
2.6	— 167.4	86.35	83.28
2.8	— 723.6	366.3	359.5
3.0		unendlich	

für das sich die Gaußschen Bahnen streng berechnen lassen⁵. Die „Linsenstärke“ eines derartigen Glockenfeldes ist durch den dimensionslosen Parameter

$$k^2 = \frac{e B_0^2 d^2}{8 m U^*} \quad (36)$$

charakterisiert, wobei d die Halbwertsbreite des Feldes und U^* die Beschleunigungsspannung des abbildenden Elektronenstrahls bedeuten.

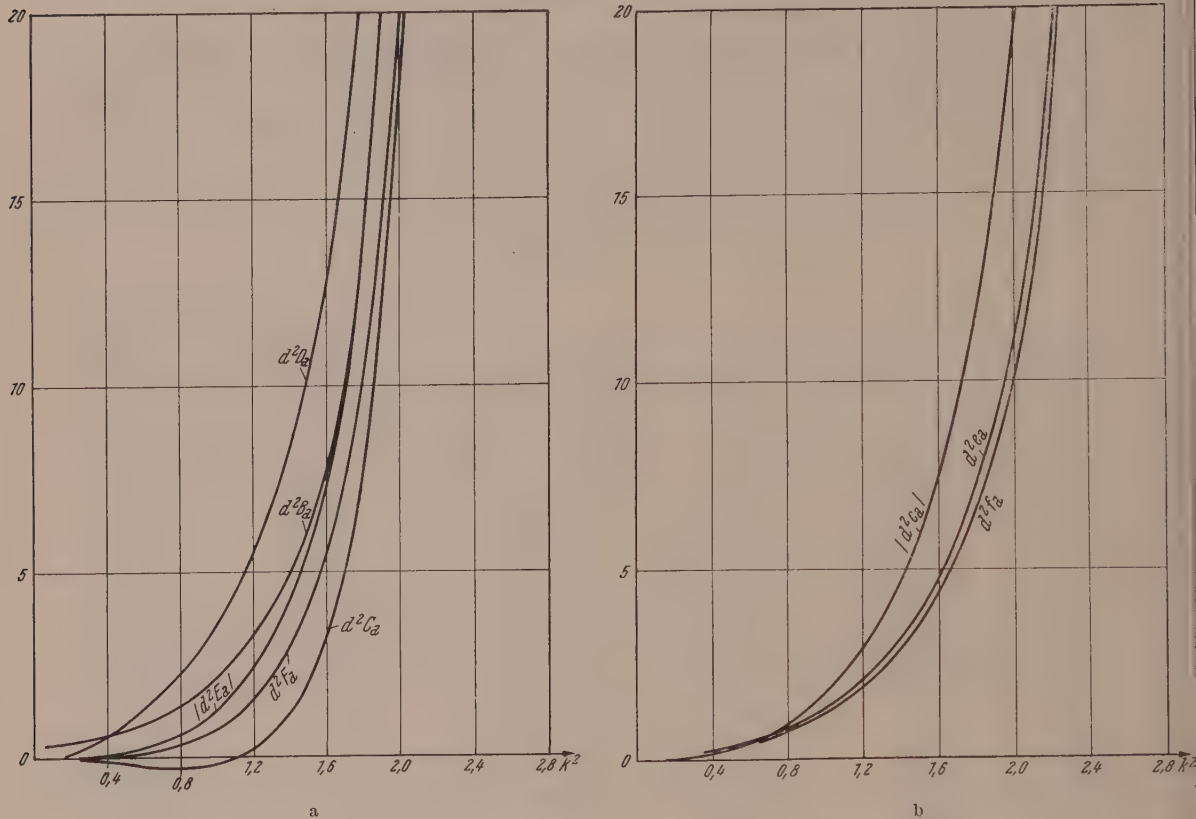


Abb. 4 a und b. Die auf die Objektebene bezogenen, mit d^2 multiplizierten Bildfehlerkoeffizienten des Glockenfeldes, in Abhängigkeit vom Parameter der Linsenstärke k^2 . Die Blende wurde in der Feldmitte angenommen und hohe Vergrößerung vorausgesetzt. Die Koeffizienten E_a und c_a sind mit negativem Vorzeichen zu nehmen.

In einer früheren Arbeit⁶ wurden die Bildfehlerkoeffizienten B_a, F_a, \dots, e_a des Glockenfeldes (35) als Funktion von Ding- und Blendenlage sowie des Parameters k^2 streng berechnet. In der vorliegenden Arbeit sollen zunächst die numerischen Werte der Bildfehlerkoeffizienten für den wichtigen Fall hoher Vergrößerung nachgetragen werden. Bei hoher Vergrößerung liegt das Ding praktisch im dingseitigen Brennpunkt, so daß wir für die Berechnung der Bildfehlerkoeffizienten als Dingort

$$\varphi_0 = \varphi_F = \pi/\omega \quad \text{mit} \quad z = d \cdot \text{ctg} \varphi \quad \text{und} \quad \omega = \sqrt{1 + k^2} \quad (37)$$

wählen können. Es ist zu beachten, daß diese Annahme bloß zur Berechnung der Bildfehlerkoeffizienten gemacht wird. Natürlich darf man für die Bestimmung des Bildortes nicht einfach $\varphi_0 = \varphi_F$ setzen (das Bild würde in diesem Falle im Unendlichen

⁵ W. Glaser: Z. Physik **117**, 285 (1941).

⁶ W. Glaser und E. Lammel: Arch. Elektrotechn. **37**, 347 (1943).

liegen), sondern muß den exakten, zur gewählten Vergrößerung gehörenden Dingort nehmen. Außerdem wurde die Blende in der Feldmitte, also bei

$$z_B = 0 \quad \text{bzw.} \quad \varphi_B = \pi/2 \quad (38)$$

gewählt. Die sich unter diesen Voraussetzungen ergebenden Bildfehlerkoeffizienten B_a, F_a, \dots, e_a sind in Tab. 1 und Abb. 4 dargestellt. Wie bereits eingangs gezeigt wurde, kann man sich mit Hilfe der Beziehung (10) aus den hier angegebenen Werten die auf eine andere Blendenlage bezüglichen Bildfehlerkoeffizienten berechnen.

5. Die Bildfehlerkoeffizienten für das Glockenfeld im System ohne Blende.

Um die Bildfehlerkoeffizienten $B_{sa}, F_{sa}, \dots, e_{sa}$ nach (34) für das Glockenfeld (35) auszuwerten, gehen wir von den Bahnen $g(z)$ und $h(z)$ in diesem Feld aus³:

$$\left. \begin{aligned} g(z) &= \frac{\sin \varphi_0}{\sin \omega (\varphi_0 - \varphi_B)} \cdot \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_B)}{\sin \varphi} \\ h(z) &= \frac{\sin \varphi_B}{\sin \omega (\varphi_B - \varphi_0)} \cdot \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi} \end{aligned} \right\} \text{ mit } z = d \cdot \operatorname{ctg} \varphi. \quad (39)$$

Wir nehmen wieder hohe Vergrößerung an, setzen also für den Dingort $\varphi_0 = \varphi_F = \pi/\omega$. Da die Bildfehlerkoeffizienten des blendenfreien Systems ihrer Definition nach vom

Tabelle 2. Bildfehlerkoeffizienten des blendenfreien Systems.

(Glockenfeld, hohe Vergrößerung, Bündelachse schneidet die optische Achse in Feldmitte. Die Koeffizienten sind bereits durch die Vergrößerung dividiert.)

k^2	B_{sa}/d	F_{sa}/d	C_{sa}/d	D_{sa}/d	E_{sa}/d
0.2	15.29	— 0.503	— 0.542	5.002	— 0.548
0.4	3.314	— 0.073	— 0.090	2.092	— 0.480
0.6	1.536	+ 0.087	+ 0.069	1.142	— 0.394
0.8	0.998	0.169	0.144	0.722	— 0.325
1.0	0.735	0.216	0.194	0.499	— 0.261
1.2	0.590	0.256	0.230	0.408	— 0.272
1.4	0.510	0.272	0.258	0.359	— 0.280
1.6	0.442	0.288	0.281	0.333	— 0.286
1.8	0.401	0.298	0.297	0.324	— 0.300
2.0	0.370	0.305	0.308	0.321	— 0.309
2.2	0.348	0.305	0.315	0.320	— 0.317
2.4	0.329	0.306	0.316	0.318	— 0.318
2.6	0.316	0.304	0.311	0.313	— 0.313
2.8	0.304	0.301	0.303	0.304	— 0.307

k^2	f_{sa}/d	c_{sa}/d	e_{sa}/d	N/d	L/d
0.2	1.646	— 1.421	0.855	1.367	4.072
0.4	0.616	— 1.230	0.506	1.203	1.769
0.6	0.350	— 1.163	0.379	1.212	1.041
0.8	0.215	— 1.099	0.309	1.183	0.716
1.0	0.146	— 1.059	0.262	1.154	0.509
1.2	0.103	— 0.944	0.201	1.043	0.381
1.4	0.079	— 0.835	0.157	0.928	0.302
1.6	0.055	— 0.730	0.113	0.808	0.226
1.8	0.040	— 0.619	0.080	0.684	0.172
2.0	0.029	— 0.507	0.053	0.558	0.122
2.2	0.022	— 0.396	0.034	0.441	0.099
2.4	0.014	— 0.289	0.019	0.316	0.062
2.6	0.008	— 0.183	0.010	0.200	0.046
2.8	0.004	— 0.093	0.005	0.101	— 0.005

Blendenort unabhängig sein müssen, steht es uns frei, auf welchen Blendenort wir die Koeffizienten B_a, F_a, \dots, e_a beziehen wollen. Zweckmäßigerweise nehmen wir $\varphi_B = \pi/2$, also die Feldmitte, und können dann die in Tab. 1 angegebenen Werte

benützen. Für $\varphi_0 = \pi/\omega$ und $\pi_B = \pi/2$ nehmen die Transformationskoeffizienten λ und κ nach (39) folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{h_0'} = \frac{d}{\omega} \cdot \frac{\sin(\pi\omega/2)}{\sin\pi/\omega}, \\ \kappa &= \frac{g_0'}{h_0'} = \frac{1}{\omega} \cdot \sin\frac{\pi\omega}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{\omega} + \left. \begin{aligned} &+ \cos\frac{\pi\omega}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Nun haben wir noch über die Strecke l zu verfügen. Wir nehmen an, daß die Bündelachse die optische Achse schneidet, und zwar in der Feldmitte. Dann ist

$$l = -z_F = -d \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}. \quad (41)$$

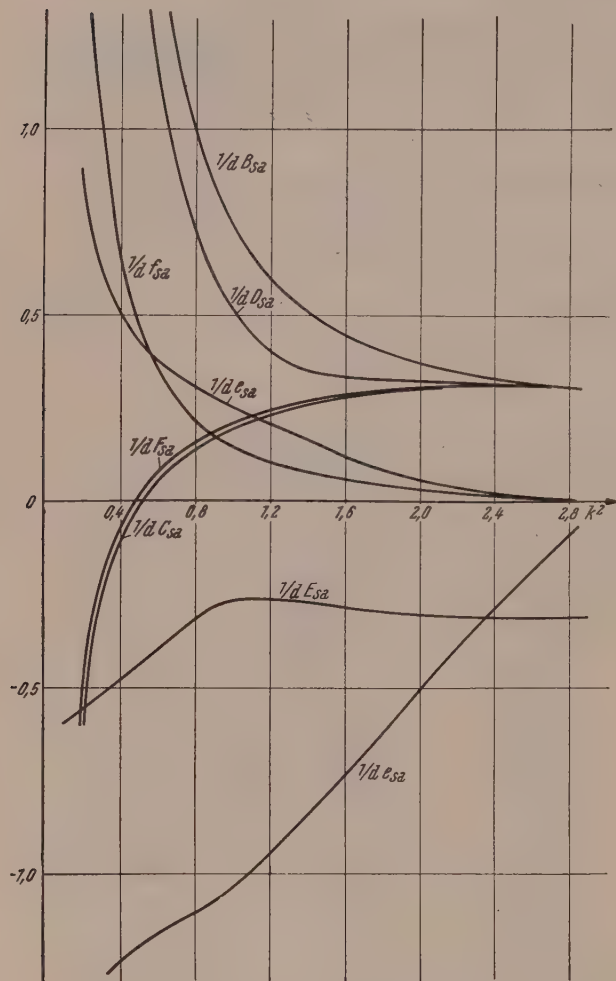


Abb. 5. Die auf die Dingebene bezogenen und durch die Halbwertsbreite d dividierten Bildfehlerkoeffizienten des blendenfreien Systems für hohe Vergrößerung, als Funktion der Linsenstärke k^2 . Die Bündelachse schneidet die optische Achse in der Feldmitte.

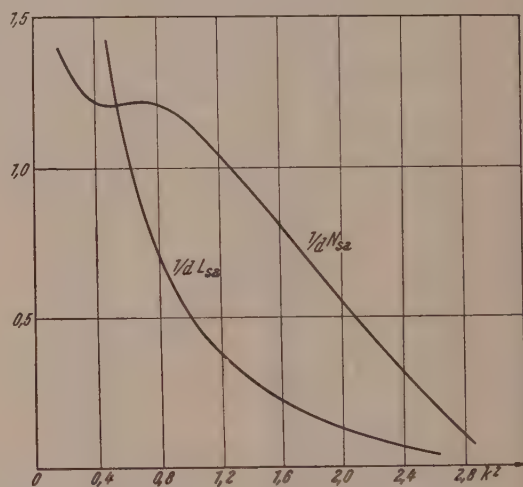


Abb. 6. Die für die Kautikfläche charakteristischen Größen N_{sa} und L_{sa} (dividiert durch die Halbwertsbreite d und auf die Dingebene bezogen) als Funktionen der Linsenstärke k^2 .

Damit sind uns die erforderlichen Größen bekannt und wir können die Koeffizienten $B_{sa}, F_{sa}, \dots, e_{sa}$ als Funktionen des Linsenparameters k^2 berechnen. Tab. 2 und Abb. 5 stellen die entsprechenden, durch die Halbwertsbreite d dividierten Werte dar.

Eine für die Gesamtwirkung aller Linsenaberrationen kennzeichnende Größe ist die Entfernung der Spitzen der beiden Kautikmütel voneinander (die allgemeiner gefaßte astigmatische Differenz)⁷. Diese Distanz beträgt (bezogen auf den Dingraum):

$$\delta = 2 N_{sa} \vartheta^2 \quad (41)$$

mit

⁷ Vgl. W. Glaser und H. Grömm: Optik 7, 96 (1950).

$$N_{sa} = \sqrt{\left(c_{sa} - \frac{2F_{sa}f_{sa}}{B_{sa}}\right)^2 + \left(C_{sa} - \frac{F_{sa}^2 - f_{sa}^2}{B_{sa}}\right)^2}. \quad (42)$$

Außerdem tritt bei der Kaustik die Größe L_{sa} auf, die den Abstand der Mitte zwischen den Kaustikspitzen von der Gaußschen Bildebene charakterisiert. Diese Größe ist durch

$$L_{sa} = C_{sa} + D_{sa} - 2 \frac{F_{sa}^2 + f_{sa}^2}{B_{sa}} \quad (43)$$

gegeben. Die zwei Kenngrößen N_{sa} und L_{sa} sind in Abhängigkeit von der Linsenstärke in Tab. 2 und Abb. 6 dargestellt.

6. Geometrisch-optisches Auflösungsvermögen in Abhängigkeit von Dezentrierungswinkel und Bündelapertur.

Wenn wir einen außerhalb der Achse liegenden Objektpunkt abbilden, so entspricht ihm in der Einstellebene ein Bildfleck, der das von den Aberrationskurven bedeckte Gebiet darstellt. Zwei nahe beieinander liegende Dingpunkte

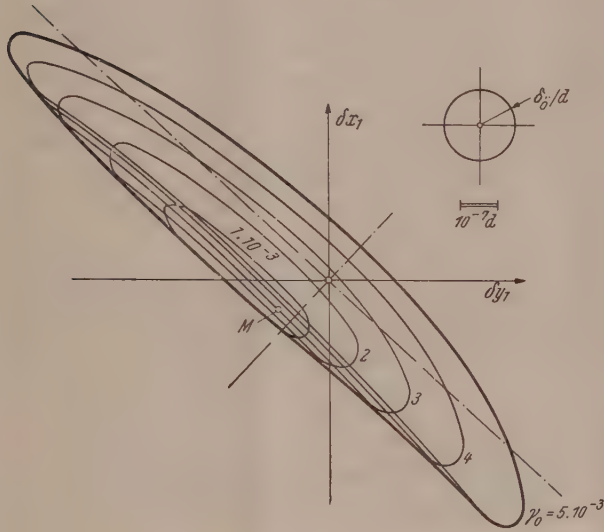


Abb. 7. Aberrationskurven für die Aperturen $\gamma = 1, 2, 3, 4$ und $5 \cdot 10^{-3}$ bei einem Dezentrierungswinkel $\vartheta = 10^{-2}$. Die stark ausgezogene Umhüllende stellt die Begrenzung der einer Maximalapertur von $\gamma_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ entsprechenden Zerstreuungfigur dar. Der Kreis rechts oben stellt das bei der gleichen Apertur für $\vartheta = 0$ auftretende Öffnungsfehlerscheibchen dar. Die Dezentrierung führt in diesem (etwas ungünstigen) Fall zu einer etwa zehnfachen Verschlechterung der Auflösung.

sprechenden Bildflecke nicht überdecken. Wir können daher das geometrisch-optische Auflösungsvermögen durch die Ausdehnung des Bildflecks charakterisieren. Um die vorhergehenden numerischen Ergebnisse anwenden zu können, setzen wir der Einfachheit halber voraus, daß die Bündelachse die optische Achse in der Feldmitte

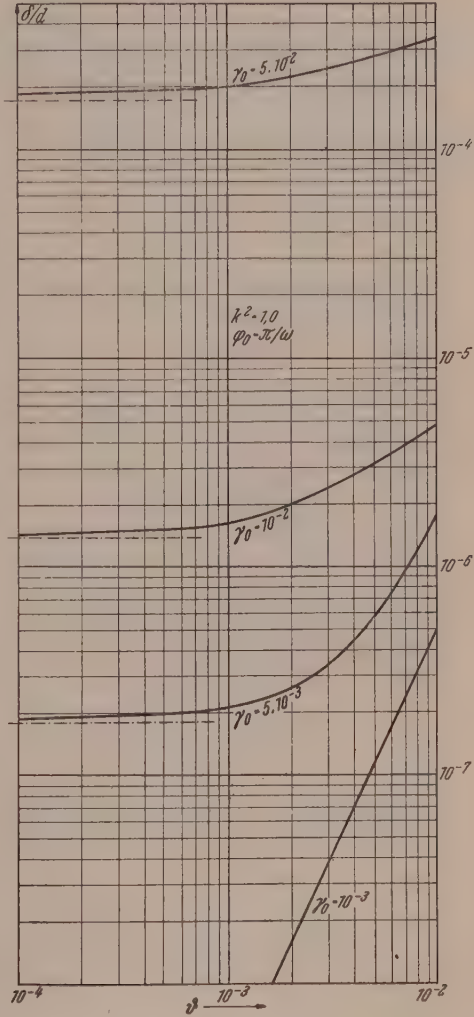


Abb. 8. Größte Ausdehnung der Zerstreuungsfunktionen nach Abb. 7 in Abhängigkeit vom Dezentrierungswinkel ϑ für verschiedene Aperturen γ_0 . Die gestrichelten Geraden geben den asymptotischen Wert für $\vartheta = 0$ an (alleinige Wirkung des Öffnungsfehlers).

können nur dann als getrennt festgestellt werden, wenn sich die ent-

schneidet, setzen also $\tau = 0$. Das Auflösungsvermögen hängt daher von der Bündelapertur γ_0 und dem Dezentrierungswinkel ϑ ab. Es soll hier, gestützt auf die Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte, der Einfluß einer mangelnden Zentrierung auf das (geometrisch-optische) Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops quantitativ ermittelt werden.

Von einem Objektpunkt falle ein Elektronenbündel der Apertur γ_0 , dessen Achse die optische Achse unter dem Winkel ϑ (Dezentrierungswinkel) schneidet, in das Abbildungssystem. Uns interessiert die ganze, in der Bildebene von Elektronen getroffene Fläche. Wir erhalten sämtliche Punkte dieses Lichtfleckes, wenn wir in den Aberrationsgleichungen (31) γ von Null bis γ_0 und ψ von Null bis 2π variieren. Zweckmäßigerweise wird man dem Winkel γ eine Reihe diskreter Werte erteilen und die dem jeweiligen konzentrischen Strahlenkegel entsprechenden Aberrationskurven in der Bildebene bestimmen. Man hat zu beachten, daß sich die einzelnen Aberrationskurven im allgemeinen überschneiden werden, so daß die gesamte von Elektronen beaufschlagte Fläche, das heißt der Bildfleck, durch die Einhüllende aller Aberrationskurven begrenzt wird. Der größte Durchmesser

$$\delta = (\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2})_{\max} \quad (45)$$

des so ermittelten Bildfleckes ist dann als geometrisch-optische Grenze des Auflösungsvermögens aufzufassen. Wir haben δ/d für verschiedene Werte von Dezentrierungswinkel ϑ und Apertur γ_0 auf zeichnerischem Wege bestimmt, und zwar für ein Glockenfeld mit dem praktischen Betriebswert $k^2 = 1$. Es wurde ferner angenommen, daß die Bündelachse die optische Achse in der Feldmitte schneidet ($l = -z_F$), so daß wir die Werte der Bildfehlerkoeffizienten aus Tab. 2 entnehmen konnten. Bei der Berechnung der einzelnen Aberrationskurven hat es sich als sehr vorteilhaft erwiesen, das in der Arbeit über die Kaustikfläche⁶ benützte „ausgezeichnete System“ zu verwenden, in dem die Abhängigkeit der Aberrationskurven von ϑ und γ eine besonders einfache Gestalt annimmt. In Abb. 7 sind als Beispiel die Aberrationskurven für $\vartheta = 10^{-2}$ wiedergegeben, wobei die Apertur γ die Werte 1, 2, 3, 4 und $5 \cdot 10^{-3}$ annimmt. Die Einhüllende der Aberrationskurven, also die Begrenzung des Bildfleckes für $\gamma_0 = 5 \cdot 10^{-3}$, ist stark ausgezogen. Rechts oben ist das entsprechende, sich bei idealer Zentrierung ($\vartheta = 0$) ergebende Öffnungsfehlerscheibchen dargestellt. In Abb. 8 ist der größte Bildfleckdurchmesser δ/d als Funktion von ϑ und γ_0 dargestellt.

(Eingegangen am 25. März 1952.)

Abwurfsicherheit des Tragseiles auf einem Seilschuh.

Von E. Czitary und G. Heinrich, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Das Tragseil einer Seilschwebbahn erfährt auf den Stützenschuhen außer der stets vorhandenen lotrechten Ablenkung auch eine seitliche, wenn eine Windwirkung quer zur Bahnachse vorhanden ist. Im ersten Teil der vorliegenden Studie wird untersucht, wie groß diese seitliche Ablenkung bei den flachen Schuhrillen der Personenseilschwebbahn sein darf, ohne daß die Gefahr des Herabzerrens des Tragseiles vom Stützenschuh besteht. Auf die Einflüsse der Schuhreibung und der Biegesteifigkeit des Seiles, welche die Abwurfsicherheit erhöhen, wurde dabei verzichtet. Im zweiten Teil wird die Stabilität des Seilgleichgewichtes untersucht. Nach Einführen eines Potentials für Seilspannung und Winddruck wird zunächst aus der ersten Variation die Gleichgewichtsfigur, dann aus der zweiten Variation der Stabilitätsbereich abgeleitet.

Summary. Besides the vertical deflection to which the carrying rope of an aerial cableway is always subjected at the support shoes, there may be a lateral deflection also in case of a side wind force. In the first part of the paper the question is discussed how large the side deflection may be which prevents the rope from falling off the flat support shoe grooves of the passenger

cableway supports. The influence of shoe friction, and of the flexural stiffness of the rope, which increase the safety against falling off, is not taken into consideration. In the second part the stability of the equilibrium of the rope is discussed. After having established a potential function for the rope tension and wind pressure, the authors derive the figure of equilibrium from the first variation, and then the domain of stability from the second variation.

Résumé. Le câble porteur d'un téléphérique subit sur ses sabots de pylône, en plus de l'inclinaison verticale qui existe toujours, une inclinaison latérale causée par l'action du vent. La première partie de l'étude discute la grandeur de l'inclinaison latérale, compatible avec la faible profondeur des rainures dans les sabots de câble pour éviter que le câble porteur ne saute de ses appuis. Les influences du frottement de sabot et la raideur du câble qui augmentent la sécurité ont été négligées. La deuxième partie traite de la stabilité d'équilibre du câble. L'introduction d'un potentiel pour la tension du câble et la pression du vent permet d'obtenir, par la première variation, la courbe représentative de l'équilibre, puis, par la deuxième variation, le domaine de stabilité.

Erster Teil¹.

A. Allgemeines.

Das Tragseil einer Seilschwebbahn erfährt auf den Stützenschuhen außer der stets vorhandenen lotrechten Ablenkung auch eine seitliche, wenn eine Windwirkung quer zur Bahnachse vorhanden ist. Schließt an eine Stütze eine große Spannweite an, so kann die seitliche Ablenkung beachtliche Werte erreichen. Die Schuhe der Personenseilschwebbahnen haben meistens eine flache und schmale Seilrille, um den auf das Tragseil wirkenden Bremszangen der Wagen einen ungehinderten Stützenübergang zu ermöglichen. Bei der Wirkung von Seitenwind kommt daher der Abwurfsicherheit des Tragseiles auf solchen Stützenschuhen eine gewisse Bedeutung zu.

Wird an einem flachen und schmalen Schuh (Abb. 1) das Tragseil zufolge einer Windwirkung beispielsweise rechts seitlich abgelenkt, so gleitet es von einem Punkt A an teilweise aus dem Schuh heraus, bis es bei B mit dem aus der Windwirkung auf das anschließende Seilfeld sich ergebenden seitlichen Ablaufwinkel δ_0 den Schuh verläßt. Im Bereich der Quergleitungen ist dabei das Seil nur entlang der Schuhkante AB in Berührung mit dem Schuh.

B. Vereinfachende Annahmen.

Zur Vereinfachung der Untersuchung sind einige Annahmen notwendig, und zwar:

1. Der Schuhhalbmesser R sei groß, der seitliche Ablaufwinkel δ_0 des Seiles aber klein, die Seilkurve im Bereich AB mithin sehr flach.
2. Der Halbmesser r der Schuhrille sei dem Seilhalbmesser $\frac{d}{2}$ gleich.
3. Eine etwaige Reibung zwischen Schuh und Seil möge bei dessen Quergleitung nicht wirken, die Berührung also völlig glatt sein.
4. Die Biegesteifigkeit des Seiles soll vernachlässigbar sein.

C. Gleichgewichtsbedingungen und Lösungen der Aufgabe.

Denken wir uns in Abb. 1 im Quergleitbereich ein Seilelement ds herausgeschnitten, so wirken an seinen Enden die Seilspannkraft S und senkrecht zur Seilachse der Gegendruck des Schuhs $p ds$. Ist bei dem gewählten Koordinatensystem φ der Tangentenneigungswinkel für die Projektion der Seilkurve in der xz -Ebene und δ jener für die Projektion in der xy -Ebene, so liefern die Gleichgewichtsbedingungen, da zufolge Punkt B,1 sowohl $\cos \varphi \doteq 1$ als auch $\cos \delta \doteq 1$:

$$\begin{array}{ll} xz\text{-Ebene:} & -S d\varphi \doteq p ds \cos \xi, \\ xy\text{-Ebene:} & S d\delta \doteq p ds \sin \xi. \end{array} \quad (1)$$

¹ Verfaßt von E. Czitary.

² Das negative Vorzeichen auf der linken Seite der ersten Gleichung berücksichtigt den Umstand, daß beim gewählten Koordinatensystem φ dauernd abnimmt.

Hierin ist ξ der Winkel zwischen $p ds$ und der lotrechten Ebene durch die Achse des Seilelementes. Statt (1) kann man hier auch schreiben

$$\left. \begin{aligned} -S d \operatorname{tg} \varphi &\doteq p dx \cos \xi, \\ S d \operatorname{tg} \delta &\doteq p dx \sin \xi, \end{aligned} \right\} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{aligned} -S \frac{d^2 z}{dx^2} &= p \cdot \cos \xi, \\ S \frac{d^2 y}{dx^2} &= p \cdot \sin \xi. \end{aligned} \right.$$

Führt man den aus der zweiten Gleichung sich ergebenden Ausdruck $p = \frac{S \frac{d^2 y}{dx^2}}{\sin \xi}$ in die erste ein, so folgt

$$-\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \xi}. \quad (2)$$

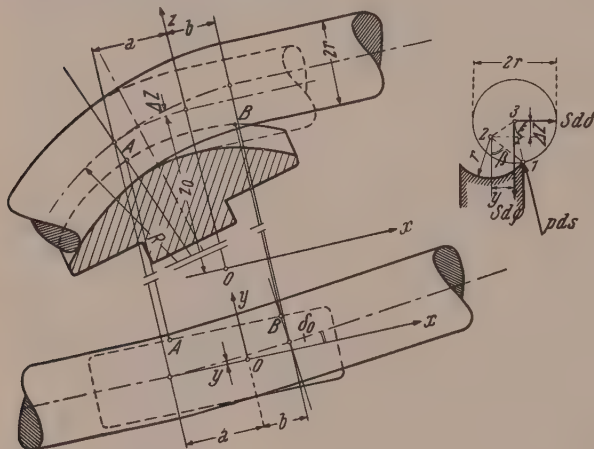


Abb. 1. Ablauf des Seiles vom Schuh bei Windwirkung auf das rechts anschließende Seilfeld.

Da nach Abb. 1 $z = z_0 + \Delta z$ und die Gleichung der Schuhkurve $x^2 + z_0^2 = R^2$ lautet, so entsteht für

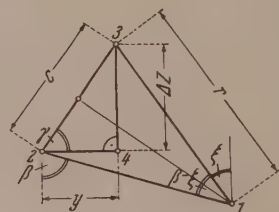


Abb. 2. Zusammenhang zwischen Δz und y .

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{d\Delta z}{dx} \doteq -\frac{x}{R} + \frac{d\Delta z}{dx}$$

und für

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{1}{R} + \frac{d^2 \Delta z}{dx^2}. \quad (3)$$

Nunmehr wollen wir Δz und y durch r , β und ξ ausdrücken. β stellt dabei den halben Öffnungswinkel der Schuhrille dar. Aus Abb. 2, in welcher das Dreieck 1 2 3 des Querschnitts von Abb. 1 vergrößert wiedergegeben ist, folgt zunächst

$$c = 2r \sin \frac{\beta - \xi}{2}.$$

Nach der Voraussetzung Punkt B, 1 ist die Ebene dieses Dreieckes nahezu parallel zur $y z$ -Ebene. Wir können daher ein weiteres Dreieck 2 3 4 zeichnen, dessen Katheten näherungsweise y und Δz gleich sein müssen. Aus diesem Dreieck, in dem $\gamma = \frac{\beta + \xi}{2}$, folgt

$$y = c \cos \gamma \quad \text{und} \quad \Delta z = c \sin \gamma.$$

Führt man in diese Ausdrücke die Werte von c und γ ein, so entsteht

$$y = 2r \sin \frac{\beta - \xi}{2} \cos \frac{\beta + \xi}{2} = r (\sin \beta - \sin \xi),$$

$$\Delta z = 2r \sin \frac{\beta - \xi}{2} \sin \frac{\beta + \xi}{2} = r (-\cos \beta + \cos \xi).$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -r \cos \xi \frac{d\xi}{dx}, & \frac{dz}{dx} &= -r \sin \xi \frac{d\xi}{dx}; \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= r \sin \xi \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 - r \cos \xi \frac{d^2\xi}{dx^2}, & \\ \frac{d^2dz}{dx^2} &= -r \cos \xi \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 - r \sin \xi \frac{d^2\xi}{dx^2}. & \end{aligned} \quad (4)$$

Setzt man nun (3) in (2) ein und in die so gewonnene Beziehung die Ausdrücke (4), dann erhält man der Reihe nach

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} - \frac{d^2dz}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dx^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \xi}, \\ \frac{1}{R} + r \sin \xi \frac{d^2\xi}{dx^2} &= -r \frac{\cos^2 \xi}{\sin \xi} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung läßt sich schließlich noch in die Form

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{\sin \xi}{Rr} \quad (5)$$

bringen, wodurch die Differentialgleichung der Aufgabe in einer für die Integration geeigneten Form gewonnen ist. Setzen wir

$$\frac{d\xi}{dx} = \psi \quad \text{und} \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} = \psi \frac{d\psi}{d\xi},$$

so erhalten wir aus (5)

$$\psi d\psi = -\frac{\sin \xi}{Rr} d\xi$$

und nach Ausführung der ersten Integration

$$\psi^2 = \frac{2}{Rr} [\cos \xi + C_1];$$

daraus entsteht weiter

$$\frac{d\xi}{dx} = -\sqrt{\frac{2}{Rr} (\cos \xi + C_1)^3}. \quad (6)$$

Am Beginn des Quergleitbereiches bei A ist $y = dz = 0$, daher $\xi = \beta$. Außerdem muß dort $y' = dz' = 0$ sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn auch $\frac{d\xi}{dx} = 0$. Mithin hat die Integrationskonstante in (6) den Wert $C_1 = -\cos \beta$. Bei der zweiten Integration ergibt sich

$$x + C_2 = -\sqrt{\frac{Rr}{2}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\cos \xi - \cos \beta}}. \quad (7)$$

Wie die nachfolgende Umformung des auf der rechten Seite stehenden Integrals zeigt, ist es ein elliptisches 1. Gattung. Setzt man nämlich, wie bei der Behandlung großer Schwingungen eines Fadenpendels, $\sin \frac{\xi}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin \eta$, so entsteht mit $\cos \frac{\xi}{2} = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \eta \frac{d\eta}{d\xi}$, $\cos \xi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\xi}{2}$ und $\cos \beta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$:

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\cos \xi - \cos \beta}} = \sqrt{2} \int \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \eta}} = \sqrt{2} \cdot F(k, \eta), \quad k = \sin \frac{\beta}{2}.$$

Damit nimmt (7) die Form an:

$$x + C_2 = -\sqrt{Rr} \cdot F(k, \eta), \quad k = \sin \frac{\beta}{2}.$$

³ Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite berücksichtigt den Umstand, daß ξ dauernd abnimmt.

Da der Beginn des Quergleitbereiches bei A durch $x = -a$ gekennzeichnet ist und dort $\xi = \beta$ gilt, so folgt mit $\sin \eta = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = 1$ und $\eta = \frac{\pi}{2}$:

$$-a + C_2 = -\sqrt{Rr} \cdot F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{Rr} K(k),$$

woraus die Integrationskonstante in (7) den Wert

$$C_2 = a - \sqrt{Rr} K(k)$$

erhält. Dadurch lautet das Resultat

$$\frac{x+a}{\sqrt{Rr}} - K(k) = -F(k, \eta), \quad k = \sin \frac{\beta}{2}$$

und nach Umkehrung

$$\sin \eta = \operatorname{sn} \left[K(k) - \frac{x+a}{\sqrt{Rr}} \right],$$

bzw. nach Einführung des Wertes für $\sin \eta$

$$\sin \frac{\xi}{2} = \operatorname{sn} \left[K(\kappa) - \frac{x+a}{\sqrt{Rr}} \right] \sin \frac{\beta}{2}, \quad \kappa = \sin \frac{\beta}{2}. \quad (8)$$

Zufolge der Zusammenhänge zwischen den elliptischen Funktionen kann (8) schließlich noch auf die Form

$$\sin \frac{\xi}{2} = \operatorname{cd} \frac{x+a}{\sqrt{Rr}} \sin \frac{\beta}{2}, \quad k = \sin \frac{\beta}{2} \quad (8a)$$

gebracht werden.

D. Anpassung der Lösung an gegebene Ablaufverhältnisse.

In der xz -Ebene gilt für die Neigung des Seiles im Quergleitbereich

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{R} + \frac{d\Delta z}{dx} = -\frac{x}{R} - r \sin \xi \frac{d\xi}{dx}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{x}{R} + \sqrt{\frac{2r}{R}} \sin \xi \sqrt{\cos \xi - \cos \beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

In der xy -Ebene ist die Neigung des Seiles im Quergleitbereich

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{dy}{dx} = -r \cos \xi \frac{d\xi}{dx}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \sqrt{\frac{2r}{R}} \cos \xi \sqrt{\cos \xi - \cos \beta}. \end{aligned} \quad (10)$$

Für den Ablaufpunkt B des Seiles vom Schuh gilt

$$x = b, \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \delta_0, \quad \frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \varphi_0 = 0 \quad \text{und} \quad \xi = \xi_0.$$

Die Gl. (9) und (10) nehmen mithin an dieser Stelle die Form an:

$$\begin{aligned} \frac{b}{R} &= \sqrt{\frac{2r}{R}} \sin \xi_0 \sqrt{\cos \xi_0 - \cos \beta}, \\ \operatorname{tg} \delta_0 &= \sqrt{\frac{2r}{R}} \cos \xi_0 \sqrt{\cos \xi_0 - \cos \beta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Diese beiden Gleichungen sind nach ξ_0 und b aufzulösen, wobei zunächst aus der zweiten Gleichung $\cos \xi_0$ zu bestimmen ist, die jedoch eine solche dritten Grades darstellt. Die für ξ_0 und b gewonnenen Werte in (8a) eingesetzt, liefern

$$\sin \frac{\xi_0}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \operatorname{cd} \frac{b+a}{\sqrt{Rr}},$$

woraus schließlich auch a gefunden werden kann.

E. Abwurfsicherheit des Seiles.

Der größtmögliche seitliche Ablaufwinkel δ^* , bei dem im Ablaufpunkt B des Seiles vom Schuh noch Gleichgewicht besteht, ergibt sich für $\xi_0 = 0$ aus der zweiten der Gl. (11) zu

$$\operatorname{tg} \delta^* = \sqrt{\frac{2r}{R}} \sqrt{1 - \cos \beta}. \quad (12)$$

Ist an einem Seilschuh, bei dem das Seil in den zwei anschließenden Spannweiten durch Windwirkung seitlich abgelenkt wird, einer der beiden seitlichen Ablaufwinkel größer als δ^* , so wird das Seil vom Schuh herabgezerrt. Dasselbe tritt auch ein, wenn zwar die seitlichen Ablaufwinkel kleiner als δ^* sind, der durch die lotrechte Ablenkung des Seiles am Schuh in Anspruch genommene Schuhbogen aber nur kurz ist. Es muß daher gemäß Abb. 3 außer den Bedingungen

$$\delta_{01} < \delta^* \quad \text{und} \quad \delta_{02} < \delta^*$$

auch noch die Bedingung

$$a_1 + a_3 < R \alpha$$

erfüllt sein, wenn α der lotrechte Ablenkwinkel des Seiles am Stützenschuh ist.

Für den größtmöglichen seitlichen Ablenkwinkel δ^* wird wegen $\xi_0 = 0$ auch $b = 0$ und demnach

$$\operatorname{sn} \left[K(k) - \frac{a}{\sqrt{Rr}} \right] = 0,$$

woraus für den in Anspruch genommenen Schuhbogen

$$a^* = \sqrt{Rr} K(k), \quad k = \sin \frac{\beta}{2}$$

folgt.

Wirkt zwischen Seil und Schuh die Reibung, so wird dadurch das Aufklettern des Seiles im Quergleitbereich teilweise verhindert und die Abwurfsicherheit erhöht.

Zweiter Teil⁴.

Untersuchung der Stabilität des Seilgleichgewichtes.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird die Annahme gemacht, daß ein Herausspringen des Seiles aus dem Schuh erst dann in Frage kommt, wenn sich das Seilmittel an der Stelle, wo die Berührung mit der Schuhrille aufhört, in einer Vertikalebene über der Schuhkante befindet.

Bei der Frage, unter welchen Bedingungen das Herausspringen des Seiles aus dem Schuh stattfindet, handelt es sich um ein Stabilitätsproblem, das auf Grund der Gleichgewichtsbedingungen allein nicht streng gelöst werden kann. Es sollen nun im folgenden unter denselben schematischen Vereinfachungen wie im ersten Teil die Stabilitätsgrenzen des unter Winddruck stehenden Seiles untersucht werden.

Da die Stabilität eines Gleichgewichtes nur dann streng definiert ist, wenn die eingepägten Kräfte durch ein Potential darstellbar sind, ergibt sich die Forderung, die Seilspannungen und den Winddruck auf ein Potential zurückzuführen. Wir legen

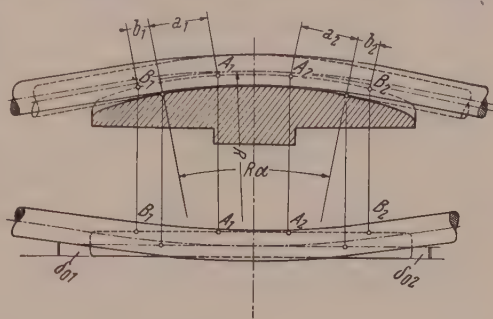


Abb. 3. Ablenkung des Seiles auf einem Schuh bei Wirkung von Seitenwind.

⁴ Verfaßt von G. Heinrich.

also im vereinfachten Schema ein nichtbiegungssteifes, undehnbares und gewichtsloses Seil der Rechnung zugrunde, in dem die einheitliche, stets gleichbleibende Spannung S herrscht und das senkrecht zur Seilachse pro Längeneinheit den konstanten Winddruck W empfängt. W sei überdies so klein, daß seine Wirkung nur dort berücksichtigt werden muß, wo es sich um große Seillängen handelt. Diese Vereinfachungen sind deshalb zulässig, weil es nur auf die Verhältnisse in der unmittelbaren Nachbarschaft des Seilschuhes ankommt. Um das der konstanten Seilspannung S entsprechende Potential zu ermitteln, denken wir uns ein Seilende fixiert und das andere Ende über eine reibungsfreie Rolle geführt und mittels eines Gewichtes $Q = S$ gespannt. Ist das Seilstück zwischen Fixpunkt und Rolle geradlinig, dann besitzt Q seine tiefste Lage. Bei dehnungsfreier Deformation des Seiles wird Q gehoben und die Hubarbeit kann direkt als das der Deformation zugehörige Potential der Seilspannung S eingeführt werden.

Um ein dem Winddruck entsprechendes Potential einzuführen, kann man sich auf das rechts vom Schuh befindliche Seilstück beschränken. Dieses würde unter den obigen Voraussetzungen ohne Winddruck eine Gerade, bei vorhandenem Winddruck aber eine Kurve bilden, mit der Geraden als Sekante. Wenn die Neigungen der Kurventangente gegen die Sekante überall klein sind, so ist $W \cdot y \cdot dx$ die Arbeit des Winddruckes auf ein Seilelement, worin dx die in der Sekantenrichtung gemessene Länge des Seilelementes und y die senkrecht zur Sekantenrichtung angenommene Verschiebung des Elementes zufolge des Winddruckes bedeuten.

Wir wählen ein Koordinatensystem nach Abb. 1. Ohne Winddruck befinden sich bei Gleichgewicht die Punkte der Seilachse in der xz -Ebene. Wir wollen annehmen, daß der Seilschuh genügend lang ist, so daß der Quergleitbereich für die rechts vom Schuh angreifende Windlast sich nicht über den ganzen Schuh erstreckt. Es existieren dann Punkte der Seilachse, wo noch keine Quergleitung stattfindet. Einen dieser Punkte mit der Abszisse x_0 können wir als Fixpunkt ansehen; wir ermitteln nun für das rechts von x_0 gelegene Seilstück das Potential U_s der Seilspannung und das Potential U_w des Winddruckes.

Es bedeuten x_1 und x_2 die Abszissen der Seilachse am Beginn des Quergleitbereiches und an der Ablösungsstelle vom Schuh und x_3 die Abszisse jener Stelle, an der das Seil auf die fiktive Rolle aufläuft, über die das Seilende mit dem Spannungsgewicht geführt gedacht wird. Das Seilstück zwischen den festen Abszissen x_0 und x_3 besitzt dann bei der Seilspannung S das Spannungspotential:

$$U_s = S \cdot \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} + \int_{x_2}^{x_3} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \right\}. \quad (13)$$

Das Winddruckpotential U_w zwischen den Abszissen x_2 und x_3 ergibt sich unter den obigen Voraussetzungen zu:

$$U_w = - W \int_{x_2}^{x_3} y dx. \quad (14)$$

(Das Seilstück zwischen x_0 und x_2 ist so kurz, daß die Windwirkung hier vernachlässigt werden kann.)

Da die Winkel der Seilelemente gegen die x -Achse als klein vorausgesetzt werden, kann man sich mit den Quadraten der Ableitungen y_x und z_x (Index x bedeutet Ableitung nach x) begnügen. Daher kann man das Gesamtpotential $U = U_s + U_w$ bei Vernachlässigung der Glieder vierter und höherer Kleinheitsordnung schreiben:

$$U = S \cdot \left\{ \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2} (y_x^2 + z_x^2) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} (y_x^2 + z_x^2) dx + \int_{x_2}^{x_3} \left(\frac{1}{2} y_x^2 + \frac{1}{2} z_x^2 - \frac{W}{S} y \right) dx \right\}. \quad (15)$$

Es ist zweckmäßig, durch die Transformation

$$x = \sqrt{Rr} u \quad (16)$$

eine neue unabhängige Variable einzuführen. Dadurch geht Gl. (15) über in:

$$U = Sr \sqrt{\frac{r}{R}} \left\{ \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{R}{r} + \frac{1}{2r^2} (z_u^2 + y_u^2) \right] du + \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{R}{r} + \frac{1}{2r^2} (z_u^2 + y_u^2) \right] du + \right. \\ \left. + \int_{u_2}^{u_3} \left[\frac{R}{r} + \frac{1}{2r^2} (z_u^2 + y_u^2) - \frac{WR}{Sr} y \right] du \right\}. \quad (17)$$

Wie im ersten Teil abgeleitet wurde, bestehen überall dort, wo sich das Seil mit dem Schuh in Kontakt befindet, die Beziehungen:

$$y = r \cdot (\sin \beta - \sin \xi), \quad (18)$$

$$z = \sqrt{R^2 - x^2} + r (-\cos \beta + \cos \xi). \quad (19)$$

Führt man die Gl. (18) und (19) in Gl. (17) ein, so erhält man, bei Beachtung von Gl. (16):

$$U = Sr \sqrt{\frac{r}{R}} \left\{ \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{R}{r} + \frac{1}{2} (u^2 + 2u \sin \xi \cdot \xi_u^I + \xi_u^{I^2}) \right] du + \right. \\ \left. + \int_{u_1}^{u_2} \left[\frac{R}{r} + \frac{1}{2} (u^2 + 2u \sin \xi \cdot \xi_u^{II} + \xi_u^{II^2}) \right] du + \int_{u_2}^{u_3} \left[\frac{R}{r} + \frac{1}{2r} (z_u^2 + y_u^2) \right] du - \frac{WR}{Sr} \int_{u_2}^{u_3} y du \right\}. \quad (20)$$

Zur schärferen Unterscheidung werden hier und später Größen, die an den Intervallgrenzen eventuell unstetig sein können, im Intervall $u_0 \leq u \leq u_1$ durch den oberen Index *I*, im Intervall $u_1 \leq u \leq u_2$ durch den oberen Index *II* und schließlich im Intervall $u_2 \leq u \leq u_3$ durch den oberen Index *III* gekennzeichnet.

Von Gl. (20) ausgehend, kann nun sowohl das Gleichgewichts- als auch das Stabilitätsproblem behandelt werden.

Die Gleichgewichtsfigur der Seilachse muß aus der Forderung $\delta U = 0$ hervorgehen, während die Ungleichung $\delta^2 U \geq 0$ den Stabilitätsbereich abgrenzt. Es muß hier aber beachtet werden, daß u_1 und u_2 freie Grenzen darstellen, deren Werte sich erst aus den Bedingungen des Systems ergeben müssen. Die Grenzen u_1 und u_2 müssen also bei der Bildung der ersten und zweiten Variation mitvariiert werden.

Aus Gl. (20) erhält man also, bei Entwicklung bis zu den Größen zweiter Kleinheitsordnung:

$$U + \delta U + \frac{1}{2} \delta^2 U = \\ = Sr \sqrt{\frac{r}{R}} \left\{ \int_{u_0}^{u_1 + \delta u_1} \left[\frac{R}{r} + \frac{u^2}{2} + u \cdot \left(\sin \xi + \cos \xi \cdot \delta \xi^I - \frac{1}{2} \sin \xi \cdot \delta \xi^{I^2} \right) (\xi_u^I + \delta \xi_u^I) + \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\xi_u^{II} + \delta \xi_u^{II})^2 \right] du + \int_{u_1 + \delta u_1}^{u_2 + \delta u_2} \left[\frac{R}{r} + \frac{u^2}{2} + u \cdot \left(\sin \xi + \cos \xi \cdot \delta \xi^{II} - \frac{1}{2} \sin \xi \cdot \delta \xi^{II^2} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\xi_u^{II} + \delta \xi_u^{II}) + \frac{1}{2} (\xi_u^{II} + \delta \xi_u^{II})^2 \right] du + \int_{u_2 + \delta u_2}^{u_3} \left[\frac{R}{r} + \frac{1}{2r^2} (z_u + \delta z_u)^2 + \frac{1}{2r^2} (y_u + \delta y_u)^2 \right] du - \\ \left. - \frac{WR}{Sr} \int_{u_2 + \delta u_2}^{u_3} (y + \delta y) du \right\}. \quad (21)$$

Zieht man von Gl. (21) die Gl. (20) ab, so erhält man, bis auf Glieder von dritter und höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \delta U + \frac{1}{2} \delta^2 U = S r \sqrt{\frac{r}{R}} & \left\{ \int_{u_0}^{u_1} \left[u \cos \xi \cdot \xi_u^I \delta \xi^I + (u \sin \xi + \xi_u^I) \delta \xi_u^I + u \cos \xi \cdot \delta \xi^I \delta \xi_u^I - \right. \right. \\
 & - \frac{u}{2} \sin \xi \cdot \xi_u^I \delta \xi^{II} + \frac{1}{2} \delta \xi_u^{II} \left. \right] du + \int_{u_1}^{u_1 + \delta u_1} \left[\frac{R}{r} + \frac{u^2}{2} + u \sin \xi \cdot \xi_u^I + \frac{1}{2} \xi_u^{II} + u \cos \xi \cdot \xi_u^I \delta \xi^I + \right. \\
 & + (u \sin \xi + \xi_u^I) \delta \xi_u^I \left. \right] du + \int_{u_1}^{u_2} \left[u \cos \xi \cdot \xi_u^{II} \delta \xi^{II} + (u \sin \xi + \xi_u^{II}) \delta \xi_u^{II} + \right. \\
 & + u \cos \xi \delta \xi^{II} \delta \xi_u^{II} - \frac{u}{2} \sin \xi \cdot \xi_u^{II} \delta \xi^{III} + \frac{1}{2} \delta \xi_u^{III} \left. \right] du - \int_{u_1}^{u_1 + \delta u_1} \left[\frac{R}{r} + \frac{u^2}{2} + u \sin \xi \cdot \xi_u^{II} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \xi_u^{III} + u \cos \xi \cdot \xi_u^{II} \delta \xi^{II} + (u \sin \xi + \xi_u^{II}) \delta \xi_u^{II} \left. \right] du + \int_{u_2}^{u_2 + \delta u_2} \left[\frac{R}{r} + \frac{u^2}{2} + u \sin \xi \cdot \xi_u^{II} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} \xi_u^{III} + u \cos \xi \cdot \xi_u^{II} \delta \xi^{II} + (u \sin \xi + \xi_u^{II}) \delta \xi_u^{II} \left. \right] du + \\
 & + \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} \left[z_u^{III} \cdot \delta z_u^{III} + y_u^{III} \delta y_u^{III} + \frac{1}{2} \delta z_u^{III} + \frac{1}{2} \delta y_u^{III} \right] du - \int_{u_2}^{u_2 + \delta u_2} \left[\frac{R}{r} + \frac{1}{2 r^2} (z_u^{III} + \right. \\
 & + y_u^{III}) + \frac{1}{r^2} (z_u^{III} \delta z_u^{III} + y_u^{III} \delta y_u^{III}) \left. \right] du - \frac{W R}{S r} \int_{u_2}^{u_3} \delta y^{III} du + \frac{W R}{S r} \int_{u_2}^{u_3} (y^{III} + \delta y^{III}) du.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Nach Ausführen geeigneter partieller Integrationen erhält man ferner:

$$\begin{aligned}
 \int_{u_0}^{u_1} [u \cos \xi \cdot \xi_u^I \delta \xi^I + (u \sin \xi + \xi_u^I) \delta \xi_u^I] du &= (u_1 \sin \xi_1 + \xi_{u_1}^I) \delta \xi_1^I - \int_{u_0}^{u_1} [\xi_{u u}^I + \sin \xi] \delta \xi^I du; \\
 \int_{u_1}^{u_2} [u \cos \xi \cdot \xi_u^{II} \delta \xi^{II} + (u \sin \xi + \xi_u^{II}) \delta \xi_u^{II}] du &= (u_2 \sin \xi_2 + \xi_{u_2}^{II}) \delta \xi_2^{II} - \\
 & - (u_1 \sin \xi_1 + \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_1^{II} - \int_{u_1}^{u_2} [\xi_{u u}^{II} + \sin \xi] \delta \xi^{II} du; \\
 \int_{u_0}^{u_1} \left[-\frac{u}{2} \sin \xi \cdot \xi_u^I \delta \xi^{II} + u \cos \xi \cdot \delta \xi^I \delta \xi_u^I + \frac{1}{2} \delta \xi_u^{II} \right] du &= \frac{1}{2} (u_1 \cos \xi_1 \delta \xi_1^I + \delta \xi_{u_1}^I) \delta \xi_1^I - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} [\delta \xi_{u u}^I + \cos \xi \cdot \delta \xi^I] \delta \xi^I du; \\
 \int_{u_1}^{u_2} \left[-\frac{u}{2} \sin \xi \cdot \xi_u^{II} \delta \xi^{III} + u \cos \xi \cdot \delta \xi^{II} \delta \xi_u^{II} + \frac{1}{2} \delta \xi_u^{III} \right] du &= \frac{1}{2} (u_2 \cos \xi_2 \delta \xi_2^{II} + \\
 & + \delta \xi_{u_2}^{II}) \delta \xi_2^{II} - \frac{1}{2} (u_1 \cos \xi_1 \cdot \delta \xi_1^{II} + \delta \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_1^{II} - \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} [\delta \xi_{u u}^{II} + \cos \xi \cdot \delta \xi^{II}] \delta \xi^{II} du; \\
 \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} z_u^{III} \cdot \delta z_u^{III} \cdot du &= -\frac{1}{r^2} z_{u_3}^{III} \cdot \delta z_{u_3}^{III} - \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} z_{u u}^{III} \delta z^{III} du; \\
 \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} (y_u^{III} \cdot \delta y_u^{III} - \frac{W R r}{S} \delta y^{III}) du &= -\frac{y_{u_3}^{III} \delta y_{u_3}^{III}}{r^2} - \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} (y_{u u}^{III} + \frac{W R r}{S}) \delta y du.
 \end{aligned}$$

Hierin wurden die Funktionswerte an den Stellen u_1 und u_2 durch die unteren Indizes 1 und 2 gekennzeichnet.

Trägt man diese Umformungen in die Gl. (22) ein und führt die Integrationen über die Intervalle u_1 bis $u_1 + \delta u_1$ und u_2 bis $u_2 + \delta u_2$ aus, indem man die Integranden nach Taylorschen Reihen entwickelt, wobei die Integrale nur bis zu Gliedern zweiter Ordnung ausgerechnet werden, so erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
 \delta U + \frac{1}{2} \delta^2 U = & S r \sqrt{\frac{r}{R}} \left\{ - \int_{u_0}^{u_1} [\xi_{u u}^I + \sin \xi] \delta \xi^I du - \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} [\delta \xi_{u u}^I + \cos \xi \cdot \delta \xi^I] \delta \xi^I du - \right. \\
 & - \int_{u_1}^{u_2} [\xi_{u u}^{II} + \sin \xi] \delta \xi^{II} du - \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} [\delta \xi_{u u}^{II} + \cos \xi \delta \xi^{II}] \delta \xi^{II} du - \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} z_{u u}^{III} \delta z^{III} du - \\
 & - \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} \left(y_{u u}^{III} + \frac{W R r}{S} \right) \delta y^{III} du + \frac{1}{2 r^2} \int_{u_2}^{u_3} \delta z_{u u}^{III} du + \frac{1}{2 r^2} \int_{u_2}^{u_3} \delta y_{u u}^{III} du + \\
 & + (u_1 \sin \xi + \xi_{u_1}^I) \delta \xi_1^I + \frac{1}{2} (u_1 \cos \xi_1 \delta \xi_1^I + \delta \xi_{u_1}^I) \delta \xi_1^I + \left(u_1 \sin \xi_1 \cdot \xi_{u_1}^I + \frac{1}{2} \xi_{u_1}^{I^2} \right) \delta u_1 + \\
 & + \frac{1}{2} [u_1 \sin \xi_1 \cdot \xi_{u u_1}^I + u_1 \cos \xi_1 \cdot \xi_{u_1}^{I^2} + \xi_{u_1}^I (\xi_{u u_1}^I + \sin \xi_1)] \delta u_1^2 + u_1 \cos \xi_1 \cdot \xi_{u_1}^I \delta \xi_1^I \delta u_1 + \\
 & + (u_1 \sin \xi_1^I + \xi_{u_1}^I) \delta \xi_{u_1}^I \delta u_1 - (u_1 \sin \xi_1 + \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_1^{II} + (u_2 \sin \xi_2 + \xi_{u_2}^{II}) \delta \xi_2^{II} - \\
 & - \left(u_1 \sin \xi_1 \cdot \xi_{u_1}^{II} + \frac{1}{2} \xi_{u_1}^{II^2} \right) \delta u_1 - \frac{1}{2} [u_1 \sin \xi_1 \cdot \xi_{u u_1}^{II} + u_1 \cos \xi_1 \cdot \xi_{u_1}^{II^2} + \xi_{u_1}^{II} (\xi_{u u_1}^{II} + \\
 & + \sin \xi_1)] \delta u_1^2 - u_1 \cos \xi_1 \cdot \xi_{u_1}^{II} \cdot \delta \xi_1^{II} \cdot \delta u_1 - (u_1 \sin \xi_1 + \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_{u_1}^{II} \delta u_1 + \frac{u_2^2}{2} \delta u_2 + \\
 & + \frac{u_2}{2} \delta u_2^2 + \left(u_2 \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II} + \frac{1}{2} \xi_{u_2}^{II^2} \right) \delta u_2 + \frac{1}{2} [u_2 \sin \xi_2 \cdot \xi_{u u_2}^{II} + u_2 \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II^2} + \\
 & + \xi_{u_2}^{II} (\xi_{u u_2}^{II} + \sin \xi_2)] \delta u_2^2 - \frac{1}{2} (u_1 \cos \xi_1 \cdot \delta \xi_1^{II} + \delta \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_1^{II} + \frac{1}{2} (u_2 \cos \xi_2 \cdot \delta \xi_2^{II} + \\
 & + \delta \xi_{u_2}^{II}) \delta \xi_2^{II} + u_2 \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II} \delta \xi_2^{II} \delta u_2 + (u_2 \sin \xi_2 + \xi_{u_2}^{II}) \delta \xi_{u_2}^{II} \delta u_2 - \frac{1}{r^2} z_{u_2}^{III} \cdot \\
 & \cdot \delta z_2^{III} - \frac{1}{r^2} y_{u_2}^{III} \delta y_2^{III} - \frac{1}{2 r^2} (z_{u_2}^{III^2} + y_{u_2}^{III^2}) \delta u_2 - \frac{1}{2 r^2} (z_{u_2}^{III} \cdot z_{u u_2}^{III} + \\
 & + y_{u_2}^{III} y_{u u_2}^{III}) \delta u_2^2 - \frac{1}{r^2} (z_{u_2}^{III} \delta z_{u_2}^{III} + y_{u_2}^{III} \delta y_{u_2}^{III}) \delta u_2 + \frac{W R}{S r} \left(y_2^{III} \delta u_2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} y_{u_2}^{III} \delta u_2^2 + \delta y_2^{III} \delta u_2 \right) \}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Die Seilachse muß nun überall stetig sein. Denkt man sich die Seilachse aus der Gleichgewichtslage um kleine Beträge verschoben, so wandern die Bereichsgrenzen u_1 nach $u_1 + \delta u_1$ und u_2 nach $u_2 + \delta u_2$. Es muß dann die variierte Seilachsenkurve auch an den Stellen $u_1 + \delta u_1$ und $u_2 + \delta u_2$ stetig sein. Es gilt somit:

$$\xi^I(u_1 + \delta u_1) + \delta \xi^I(u_1 + \delta u_1) = \xi^{II}(u_1 + \delta u_1) + \delta \xi^{II}(u_1 + \delta u_1)$$

und daraus folgt, wenn man bis zu den Gliedern zweiter Ordnung entwickelt:

$$\begin{aligned}
 \xi_1^I + \xi_{u_1}^I \delta u_1 + \frac{1}{2} \xi_{u u_1}^I \delta u_1^2 + \delta \xi_1^I + \delta \xi_{u_1}^I \delta u_1 = & \xi_1^{II} + \xi_{u_1}^{II} \delta u_1 + \\
 & + \frac{1}{2} \xi_{u u_1}^{II} \delta u_1^2 + \delta \xi_1^{II} + \delta \xi_{u_1}^{II} \delta u_1.
 \end{aligned}$$

Darin ist $\delta \xi_1^{II}$ die bis u_1 extrapolierte Variation von ξ im Intervall II . Wegen der

Stetigkeit der unvariieren Seilachsenkurve ist $\xi_1^I = \xi_1^{II} = \xi_1$. Man erhält also die Beziehung:

$$\delta \xi_1^{II} = \delta \xi_1^I + (\xi_{u_1}^I - \xi_{u_1}^{II}) \delta u_1 + \frac{1}{2} (\xi_{u u_1}^I - \xi_{u u_1}^{II}) \delta u_1^2 + (\delta \xi_{u_1}^I - \delta \xi_{u_1}^{II}) \delta u_1. \quad (24)$$

Es ist also im allgemeinen

$$\delta \xi_1^{II} \neq \delta \xi_1^I.$$

Ganz analog erhält man:

$$\delta y_2^{III} = \delta y_2^{II} + (y_{u_2}^{II} - y_{u_2}^{III}) \delta u_2 + \frac{1}{2} (y_{u u_2}^{II} - y_{u u_2}^{III}) \delta u_2^2 + (\delta y_{u_2}^{II} - \delta y_{u_2}^{III}) \delta u_2, \quad (25)$$

$$\delta z_2^{III} = \delta z_2^{II} + (z_{u_2}^{II} - z_{u_2}^{III}) \delta u_2 + \frac{1}{2} (z_{u u_2}^{II} - z_{u u_2}^{III}) \delta u_2^2 + (\delta z_{u_2}^{II} - \delta z_{u_2}^{III}) \delta u_2. \quad (26)$$

Führt man hierin die Werte aus den Gl. (18) und (19) ein, so erhält man bei Beachtung von Gl. (16):

$$\begin{aligned} \delta y_2^{III} = & -r \left[\cos \xi_2 \delta \xi_2^{II} + \left(\cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II} + \frac{y_{u_2}^{III}}{r} \right) \delta u_2 \right] + \frac{r}{2} \sin \xi_2 \cdot \delta \xi_2^{II^2} + \\ & + \frac{r}{2} \left(\sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II^2} - \cos \xi_2 \cdot \xi_{u u_2}^{II} - \frac{y_{u u_2}^{III}}{r} \right) \delta u_2^2 + r \left(\sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II} \delta \xi_2^{II} - \right. \\ & \left. - \cos \xi_2 \cdot \delta \xi_{u_2}^{II} - \frac{\delta y_{u_2}^{III}}{r} \right) \delta u_2, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \delta z_2^{III} = & -r \left[\sin \xi_2 \cdot \delta \xi_2^{II} + \left(u_2 + \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II} + \frac{z_{u_2}^{III}}{r} \right) \delta u_2 \right] - \frac{r}{2} \cos \xi_2 \cdot \delta \xi_2^{II^2} - \\ & - \frac{r}{2} \left(1 - \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II^2} + \sin \xi_2 \cdot \xi_{u u_2}^{II} + \frac{z_{u u_2}^{III}}{r} \right) \delta u_2^2 - r \left(\cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II} \cdot \delta \xi_2^{II} + \right. \\ & \left. + \sin \xi_2^{II} \cdot \delta \xi_{u_2}^{II} + \frac{\delta z_{u_2}^{III}}{r} \right) \delta u_2. \end{aligned} \quad (26a)$$

Man kann nun die Ausdrücke Gl. (24), (25a) und (26a) in Gl. (23) einführen und erhält sodann durch Auftrennen nach Größen erster und zweiter Ordnung nach gehöriger Reduktion:

$$\begin{aligned} \delta U = & S r \sqrt{\frac{r}{R}} \left\{ - \int_{u_0}^{u_1} [\xi_{u u}^I + \sin \xi] \delta \xi^I \cdot du - \int_{u_1}^{u_2} [\xi_{u u}^{II} + \sin \xi] \delta \xi^{II} du - \right. \\ & - \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} z_{u u}^{III} \delta z^{III} du - \frac{1}{r^2} \int_{u_2}^{u_3} \left(y_{u u}^{III} + \frac{W R r}{S} \right) \delta y^{III} du + (\xi_{u_1}^I - \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_1^I + \\ & + \frac{1}{2} (\xi_{u_1}^I - \xi_{u_1}^{II})^2 \delta u_1 + \left(u_2 \sin \xi_2 + \xi_{u_2}^{II} + \frac{z_{u_2}^{III}}{r} \sin \xi_2 + \frac{y_{u_2}^{III}}{r} \cos \xi_2 \right) \delta \xi_2^{II} + \\ & + \left[\frac{u_2^2}{2} + u_2 \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II} + \frac{1}{2} \xi_{u_2}^{II^2} + \frac{z_{u_2}^{III}}{r} (u_2 + \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II}) + \frac{y_{u_2}^{III}}{r} \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{II} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2 r^2} (z_{u_2}^{III^2} + y_{u_2}^{III^2}) + \frac{W R}{S r} y_2^{III} \right] \delta u_2 \Big\}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta^2 U = & S r \sqrt{\frac{r}{R}} \left\{ - \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} [\delta \xi_{u u}^I + \cos \xi \cdot \delta \xi^I] \delta \xi^I du - \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} [\delta \xi_{u u}^{II} + \cos \xi \cdot \delta \xi^{II}] \delta \xi^{II} du + \right. \\ & + \frac{1}{2 r^2} \int_{u_2}^{u_3} \delta z_{u u}^{III^2} du + \frac{1}{2 r^2} \int_{u_2}^{u_3} \delta y_{u u}^{III^2} du + \frac{1}{2} \xi_{u u_1}^I (\xi_{u_1}^I - \xi_{u_1}^{II}) \delta u_1^2 + (\xi_{u_1}^I - \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_{u_1}^I \delta u_1 - \\ & - \frac{1}{2} (\xi_{u_1}^I - \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_{u_1}^{II} \delta u_1 + \frac{1}{2} (\delta \xi_{u_1}^I - \delta \xi_{u_1}^{II}) \delta \xi_1^I + \frac{1}{2} \left[u_2 (1 + \sin \xi_2 \cdot \xi_{u u_2}^{II} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}^2}) + \xi_{u_2}^{\text{II}} (\sin \xi_2 + \xi_{u_2}^{\text{II}}) + \frac{z_{u_2}^{\text{III}}}{r} \left(1 + \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}^2} + \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}^3} + \right. \\
& \left. + \frac{z_{u_2}^{\text{III}}}{r} \right) - \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} \left(\sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}^2} - \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}} - \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} \right) - \frac{1}{r^2} (z_{u_2}^{\text{III}} \cdot z_{u_2}^{\text{III}} + \\
& + y_{u_2}^{\text{III}} \cdot y_{u_2}^{\text{III}}) + \frac{WR}{S} \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} \delta u_2^2 + \left(\frac{1}{2} u_2 \cos \xi_2 + \frac{z_{u_2}^{\text{III}}}{2r} \cos \xi_2 - \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{2r} \sin \xi_2 \right) \delta \xi_2^{\text{II}^3} + \\
& + \left(u_2 \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}} + \frac{z_{u_2}^{\text{III}}}{r} \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}} - \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}} \right) \delta \xi_2^{\text{II}} \delta u_2 + \left(u_2 \sin \xi_2 + \xi_{u_2}^{\text{II}} + \right. \\
& \left. + \frac{z_{u_2}^{\text{III}}}{r} \sin \xi_2 + \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} \cos \xi_2 \right) \delta \xi_{u_2}^{\text{II}} \delta u_2 + \frac{1}{2} \delta \xi_2^{\text{II}} \delta \xi_{u_2}^{\text{II}} + \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r^2} \delta y_{u_2}^{\text{III}} \delta u_2 - \\
& \left. - \frac{1}{r^2} (z_{u_2}^{\text{III}} \delta z_{u_2}^{\text{III}} + y_{u_2}^{\text{III}} \delta y_{u_2}^{\text{III}}) \delta u_2 \right\}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Aus Gl. (27) folgt nun für $\delta U = 0$:

$$\xi_{u_2}^{\text{I}} + \sin \xi = 0, \quad (27a)$$

$$\xi_{u_2}^{\text{II}} + \sin \xi = 0, \quad (27b)$$

$$z_{u_2}^{\text{III}} = 0, \quad (27c)$$

$$y_{u_2}^{\text{III}} + \frac{WRr}{S} = 0. \quad (27d)$$

Aus Gl. (27a) folgt durch einmalige Integration

$$\frac{1}{2} \xi_{u_2}^{\text{I}^2} - \cos \xi = C.$$

Für $u = u_0$ ist noch keine Quergleitung vorhanden, daher ist dort $\xi_{u_0}^{\text{I}} = 0$ und $\xi_0 = \beta$, daraus folgt $C = -\cos \beta$ und $\xi_{u_2}^{\text{I}} = \pm \sqrt{2(\cos \xi - \cos \beta)}$. Da nach Voraussetzung die Quergleitung erst bei $u = u_1$ beginnt, gilt im ganzen Bereich I: $\xi = \beta$ und daher $\xi_{u_2}^{\text{I}} = 0$. Die Gl. (27a) hat also nur die singuläre Lösung: $\xi^{\text{I}} = \beta$. Im Intervall $u_1 \leq u \leq u_2$ gilt die Differentialgleichung (27b) und aus ihr folgt durch einmalige Integration:

$$\xi_{u_2}^{\text{II}} = \frac{(+)}{-} \sqrt{2(C + \cos \xi)}. \quad (28)$$

Aus Gl. (27) folgt aber, wegen $\delta U = 0$, die Beziehung:

$$\xi_{u_1}^{\text{I}} = \xi_{u_1}^{\text{II}}. \quad (29)$$

Dies bedeutet, daß die Seilachse ohne Knick in den Quergleitbereich übergeht. Da $\xi_{u_1}^{\text{I}} = 0$, ist auch $\xi_{u_1}^{\text{II}} = 0$. Nun ist aber wegen der Stetigkeit der Seilachse $\xi_1 = \beta$, daher folgt aus Gl. (28):

$$C = -\cos \beta \quad \text{und} \quad \xi_{u_2}^{\text{II}} = \frac{(+)}{-} \sqrt{2(\cos \xi - \cos \beta)}. \quad (28a)$$

Die Gründe für die Wahl des negativen Vorzeichens werden später erörtert.

Die Integration von Gl. (28a) liefert bei Beachtung des Anfangswertes $\xi_1 = \beta$ die Beziehung:

$$\sin \frac{\xi}{2} = \frac{\text{cn}(u - u_1)}{\text{dn}(u - u_1)} \cdot \sin \frac{\beta}{2}, \quad (30)$$

wobei für den Modul k der elliptischen Funktion

$$k = \sin \frac{\beta}{2} \quad (30a)$$

zu setzen ist.

Aus Gl. (27d) folgt unmittelbar:

$$y^{\text{III}} = -\frac{WRr}{2S} (u - u_2)^2 + y_{u_2}^{\text{III}} (u - u_2) + y_2^{\text{III}} \quad (31)$$

als Gleichung der Seilachsenkurve rechts vom Schuh und daraus:

$$\frac{W R r}{S} y_2^{\text{III}} = \frac{2 y_2^{\text{III}} (y_2^{\text{III}} - y_3^{\text{III}})}{(u_3 - u_2)^2} - \frac{2 y_2^{\text{III}} y_{u_2}^{\text{III}}}{u_3 - u_2}.$$

Da man $(u_3 - u_2)$ beliebig groß machen kann, erkennt man, daß man $\frac{W R r}{S} y_2^{\text{III}}$ stets vernachlässigbar klein gegen $\frac{y_{u_2}^{\text{III}2}}{2}$ machen kann, so daß das letzte Glied in Gl. (27) gestrichen werden kann.

Aus Gl. (31) folgt wegen $y_3^{\text{III}} = 0$:

$$\frac{W R r}{2 S} = \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{u_3 - u_2} + \frac{y_2^{\text{III}}}{(u_3 - u_2)^2} \approx \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{u_3 - u_2}. \quad (32)$$

Das Glied $\frac{y_2^{\text{III}}}{(u_3 - u_2)^2}$ kann gestrichen werden, da y_2 und y_{u_2} etwa von gleicher Größenordnung sind und $u_3 - u_2 \gg 1$ vorausgesetzt werden kann. Die Änderung von $(u_3 - u_2)$ kann ebenfalls vernachlässigt werden, es ist also $y_{u_2}^{\text{III}}$ bei gegebener Anordnung und gegebenem Winddruck ein Festwert, der von u_2 und y_2^{III} nicht mehr abhängt. Der Neigungswinkel δ_2 , den die Seilachse beim Verlassen des Schuhs mit der x -Achse einschließt, steht mit $y_{u_2}^{\text{III}}$ in der Beziehung:

$$\text{tg } \delta_2 = y_{u_2} = \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{\sqrt{R r}}. \quad (33)$$

Nach (32) und (33) kann $\text{tg } \delta_2$ als Maß des Winddruckes eingeführt werden. Aus Gl. (27c) folgt schließlich $z_u^{\text{III}} = \text{konst.}$ und entsprechend dem Koordinatensystem nach Abb. 1:

$$z_u^{\text{III}} = z_{u_2}^{\text{III}} = 0. \quad (34)$$

Aus $\delta U = 0$ folgen ferner gemäß Gl. (27) noch die Beziehungen:

$$u_2 \sin \xi_2 + \xi_{u_2}^{\text{II}} + \frac{z_{u_2}^{\text{III}}}{r} \sin \xi_2 + \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} \cos \xi_2 = 0, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_2^2}{2} + u_2 \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}} + \frac{1}{2} \xi_{u_2}^{\text{II}2} + \frac{z_{u_2}^{\text{III}}}{r} (u_2 + \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}}) + \\ + \frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}} + \frac{1}{2 r^2} (z_{u_2}^{\text{III}2} + y_{u_2}^{\text{III}2}) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Eliminiert man aus Gl. (35) und (36) die Größe $z_{u_2}^{\text{III}}$, so erhält man:

$$\left(\frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} + \xi_{u_2}^{\text{II}} \cos \xi_2 \right)^2 = 0.$$

Daraus folgt:

$$\frac{y_{u_2}^{\text{III}}}{r} = - \cos \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}} \quad (37)$$

und durch Einsetzen in Gl. (35):

$$\frac{z_{u_2}^{\text{III}}}{r} = - (u_2 + \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}}). \quad (38)$$

Aus den Gl. (18) und (19) in Verbindung mit Gl. (16) erkennt man, daß die Gl. (37) und (38) den knickfreien Übergang der Seilachse an der Ablösestelle vom Schuh ausdrücken. Die Gleichgewichtsfigur der Seilachse ist also eine überall stetige und differenzierbare Kurve.

Da nach Wahl unseres Koordinatensystems (Abb. 1) $z_{u_2}^{\text{III}} = 0$ ist, gilt nach Gl. (38) die Beziehung:

$$u_2 = - \sin \xi_2 \cdot \xi_{u_2}^{\text{II}}. \quad (39)$$

Aus Gl. (28a), (37) und (33) folgt schließlich:

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{(+)}{+} \sqrt{\frac{2r}{R} \cos \xi_2 \cdot \sqrt{\cos \xi_2 - \cos \beta}}. \quad (40)$$

Es wurde bei der Vorzeichenfestlegung des Winkels ξ angenommen, daß die wirksame Komponente des Windes in die positive y -Achse fällt, daher scheidet das obere Vorzeichen in Gl. (40) aus und damit auch das obere Vorzeichen in Gl. (28).

Es ist leicht einzusehen, daß Gl. (40), nach $\cos \xi_2$ aufgelöst, für entsprechend kleine Werte von $\operatorname{tg} \delta_2$ nur eine reelle, und zwar positive Lösung besitzt. Nun gibt es offenbar drei Möglichkeiten: $\cos \xi_2 = 1$. Für $\cos \xi_2 > 1$ existiert kein reeller Winkel und ein Gleichgewicht ist dann unmöglich. Für $\cos \xi_2 < 1$ erhalten wir aber zwei mögliche Gleichgewichte, und zwar für $\xi_2 > 0$ und $\xi_2 < 0$.

In letzterem Falle wird der Winkel $\xi = 0$ durchlaufen und an dieser Stelle ist nach Gl. (20) $\xi_{uu} = 0$. Nun folgt aber aus Gl. (18) in Verbindung mit Gl. (16): $y_{uu} = r \cdot (\sin \xi \cdot \xi_{uu}^2 - \cos \xi \cdot \xi_{uu})$. Es ist also für $\xi = 0$ auch $y_{uu} = 0$. Die Projektion der Gleichgewichtsfigur der Seilachse auf die x y -Ebene besitzt dann an dieser Stelle einen Wendepunkt.

Es kann nur auf Grund einer Stabilitätsuntersuchung streng entschieden werden, welche der aufgefundenen Gleichgewichtsfiguren stabil oder labil sind.

Hierüber kann $\delta^2 U$ nach Gl. (28) Aufschluß geben. Setzt man die Integranden der in Gl. (28) aufscheinenden Integrale gleich Null, so erhält man die Jacobischen Differentialgleichungen für das Sekundärproblem⁵. Sie lauten:

$$\delta \xi_{uu}^I + \cos \xi \cdot \delta \xi^I = 0, \quad (41)$$

$$\delta \xi_{uu}^{II} + \cos \xi \cdot \delta \xi^{II} = 0. \quad (42)$$

Ihre Lösungen können als Einhüllende einer Lösungsschar des ursprünglichen Variationsproblems angesehen werden. Da für das Intervall $u_0 \leq u \leq u_1$ die Gleichgewichtsfigur als singuläre Lösung bereits als Einhüllende einer Lösungsschar von Gl. (27a) angesehen werden kann, fallen hier die Lösungen des primären und sekundären Problems zusammen und es gilt:

$$\delta \xi^I = 0. \quad (41a)$$

Im Bereich $u_1 \leq u \leq u_2$ setzen wir:

$$\delta \xi^{II} = \varepsilon \cdot \eta(u), \quad (43)$$

worin ε ein verschwindend kleiner Festwert ist. Dann lautet Gl. (42):

$$\eta_{uu} + \eta \cdot \cos \xi = 0. \quad (42a)$$

Gl. (42a) hat als Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei voneinander unabhängige partikuläre Lösungen $\bar{\eta}$ und η , deren Linearkombination die allgemeine Lösung darstellt. Nach der allgemeinen Theorie⁵ erhält man die beiden voneinander unabhängigen Lösungen, indem man die allgemeine Lösung der zum ursprünglichen Variationsproblem gehörigen Eulerschen Gleichung nach den beiden Integrationskonstanten partiell differenziert. Die Lösung der Eulerschen Gleichung, Gl. (27b), ist durch Gl. (30) gegeben, die wir in der Form

$$\xi = 2 \arcsin \left[k \frac{\operatorname{cn}(u - u_1)}{\operatorname{dn}(u - u_1)} \right]; \quad \left(k = \sin \frac{\beta}{2} \right) \quad (30b)$$

anschreiben. Man kann dann setzen:

$$\bar{\eta} = \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\partial \xi}{\partial k} \quad \text{und} \quad \eta = C_1 \bar{\eta} + C_2 \eta$$

⁵ Vgl. D. Bolza: Vorlesungen über Variationsrechnung, S. 54ff. Leipzig und Berlin: Teubner, 1909. Wir begnügen uns mit der Feststellung eines „schwachen Minimums“.

mit beliebigen Integrationskonstanten C_1 und C_2 . Da aber am Beginn des Quergleitbereiches wegen $\delta\xi_1^I = 0$ auch $\delta u_1 = 0$ gelten muß, folgt aus Gl. (24) $\delta\xi_1^{II} = 0$. Es müssen also C_1 und C_2 so gewählt werden, daß $\eta(u_1) = \eta_1 = 0$ wird. Aus Gl. (30b) folgt nun: $\bar{\eta} = 2k \sqrt{1 - k^2} \frac{\operatorname{sn}(u - u_1)}{\operatorname{dn}(u - u_1)}$. Da für $u = u_1$ $\eta_1 = 0$, so ist $C_2 = 0$ und wir brauchen $\bar{\eta}$ nicht zu berechnen. Da es auf die Größe von C_1 nicht ankommt, wählen wir $C_1 = \frac{1}{2k \sqrt{1 - k^2}}$ und erhalten:

$$\eta = \frac{\operatorname{sn}(u - u_1)}{\operatorname{dn}(u - u_1)}. \quad (44)$$

Man kann sich leicht direkt überzeugen, daß Gl. (44) ein partikuläres Integral von Gl. (42a) ist.

Die Integrale

$$\frac{1}{2r^2} \int_{u_2}^{u_3} \delta z_u^{III} du \quad \text{und} \quad \frac{1}{2r} \int_{u_2}^{u_3} \delta y_u^{III^2} du$$

haben stets einen positiven Wert, außer für:

$$\delta z_u^{III} = \delta y_u^{III} = 0. \quad (45)$$

Da es auf den Minimalwert von $\delta^2 U$ ankommt, müssen wir δz_u^{III} und δy_u^{III} nach Gl. (45) wählen, was mit der asymptotischen Lösung für die Seilkurve rechts vom Schuh verträglich ist. Führt man dies in Gl. (28) ein und beachtet die Beziehungen (29), (34), (27a), (27b), (27c), (37), (39) und (45), so verbleibt, wenn man noch die Glieder $\frac{WR}{Sr} y_{u_2}^{III}$ aus den früher erörterten Gründen streicht:

$$\delta^2 U = Sr \sqrt{\frac{r}{R}} \delta\xi_{u_2}^{II} \cdot \delta\xi_2^{II}. \quad (46)$$

Aus Gl. (30) folgt aber:

$$\cos \xi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} = 1 - 2k^2 \frac{\operatorname{cn}^2(u - u_1)}{\operatorname{dn}^2(u - u_1)}$$

und vermöge dieser Gleichung und der Beziehungen zwischen den elliptischen Funktionen von Jacobi ergibt sich aus Gl. (44):

$$\eta = \frac{1}{\sin \beta} \sqrt{2(\cos \xi - \cos \beta)}; \quad \left(\sin \frac{\beta}{2} = k\right). \quad (44a)$$

Aus Gl. (43) und (44a) erhält man schließlich:

$$\delta\xi_2 = \frac{\xi}{\sin \beta} \sqrt{2(\cos \xi_2 - \cos \beta)}. \quad (47)$$

Aus Gl. (28a) folgt:

$$\delta\xi_u^{II} = \frac{\varepsilon}{\sin \beta} \sin \xi_2. \quad (48)$$

Damit nimmt $\delta^2 U$ nach Gl. (46) den Wert

$$\delta^2 U = Sr \sqrt{\frac{r}{R}} \frac{\varepsilon^2}{\sin^2 \beta} \sqrt{2(\cos \xi_2 - \cos \beta)} \cdot \sin \xi_2 \quad (49)$$

an.

Da der Winkel ξ_2 von β an mit wachsendem u abnimmt, liegt die erste Nullstelle, die nach $\xi = \beta$ erreicht wird, bei $\xi_2 = 0$. Hier ist also die Grenze der Stabilität, was mit der im ersten Teil getroffenen Annahme übereinstimmt.

Ich danke Herrn P. Funk für viele wertvolle Anregungen.

(Eingegangen am 8. April 1952.)

Zur Stabilität der langen, in gleichen Abständen querversteiften Rechteckplatte.

Von F. Pochop, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Das Energieverfahren führt bei Rechteckplatten mit wachsendem Seitenverhältnis nur scheinbar zu immer schlechter konvergierenden Näherungslösungen. Durch Beachtung der sich tatsächlich ausbildenden Beulfläche kann man nämlich auch bei langen Platten gute Näherungswerte mit wenigen Amplitudengliedern erhalten. Wie man zu diesen maßgebenden Gliedern gelangt, wird für die in gleichen Abständen querversteifte Rechteckplatte gezeigt. Als Anwendungsbeispiele werden die Mindeststeifigkeiten der Querrippen im Grenzfall des gleichmäßig längsgedrückten sowie des schubbeanspruchten Plattenstreifens errechnet.

Summary. When applied to rectangular plates, the energy method leads to approximative solutions the convergence of which seems to deteriorate with increasing side ratio. By taking the real buckling surface into consideration, good approximative values may be obtained, however, even for long plates, with the use of a few amplitude terms only. It is shown how these essential terms may be found for the rectangular plate stiffened transversally at equal distances. As an example, the minimum rigidity of the transverse ribs is calculated for the limiting cases of the uniformly, longitudinally loaded plate strip, and the plate strip loaded in shear.

Résumé. La méthode énergétique conduit, pour des plaques rectangulaires, à des solutions approximatives dont la convergence semble devenir mauvaise pour les grands allongements. En tenant compte de la surface réelle de voilement, on peut toutefois obtenir de bonnes valeurs approximatives, aussi bien pour des plaques très allongées, avec un petit nombre de termes. Il est démontré comment s'obtiennent les termes essentiels pour la plaque raidie par des nervures transversales et équidistantes. Comme exemple, on calcule la raideur minima des nervures transversales dans les cas limites d'une plaque très longue sollicitée en compression uniforme et axiale, ou en cisaillement.

1. Einleitung.

Durch zweckmäßige Anordnung von Aussteifungen können die kritischen Belastungen, unter denen das Gleichgewicht dünner Platten instabil wird, erheblich erhöht werden. Als erster untersuchte Timoschenko¹ die an den Rändern gelenkig gelagerte, durch Quer- oder Längsrippen versteifte Rechteckplatte unter Längs- sowie unter Schubbeanspruchung. Er benützte dazu das Energieverfahren. Für die gleichmäßig gedrückte Rechteckplatte mit Längs- oder Quersteifen gab später Barbré² strenge Lösungen an. Die Frage nach den verschiedenen Arten der Mindeststeifigkeiten von Plattenrippen beantwortete Kromm³.

Die vorliegende Schrift zeigt die Möglichkeit auf, mit Hilfe des Energieverfahrens brauchbare Näherungslösungen insbesondere für die durch viele, in gleichen Abständen angeordnete Querrippen gestützte Rechteckplatte — einfachheitshalber wollen wir im folgenden von der querversteiften langen Rechteckplatte sprechen — aufzustellen. Selbstverständlich bleiben die zu diesem Zweck umgeformten Beulbedingungen in der neuen Gestalt auch für kurze Platten, das heißt für Platten mit wenigen Quersteifen gültig.

Das Material der von uns betrachteten Platten mit dem Seitenverhältnis $\alpha = \frac{a}{b}$ und der gleichmäßigen Dicke t wird als isotrop und homogen vorausgesetzt, außerdem soll das Hookesche Gesetz unbeschränkt gelten. Als Belastungen werden die auf die Längeneinheit bezogenen Normalkräfte n_x und Schubkräfte n_{xy} in der gemäß

¹ Timoschenko: Eisenbau 147 (1921).

² Barbré: Ingenieur-Arch. 117 (1937).

³ Kromm: Stahlbau 81 (1944).

Abb. 1a und 1b vereinfachten Form aufgebracht. Demnach lassen sich die Normalspannungen durch die lineare Beziehung

$$\sigma_x(y) = +\sigma_1 \left[\psi + (1 - \psi) \frac{y}{b} \right] \quad (1)$$

wiedergeben, während sich die Schubspannungen τ_{xy} gleichmäßig über die Platte erstrecken.

Die zu Beginn des Ausbeulens vorhandene kritische Spannung

$$\sigma_k = k \sigma_e \quad (2)$$

ist in üblicher Weise auf die Hilfsgröße

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 K}{b^2 t} = \frac{\pi^2 E}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2$$

bezogen. Der Beulwert k hängt von der Belastungsart, den Randbedingungen und der geometrischen Gestalt der Platte ab.

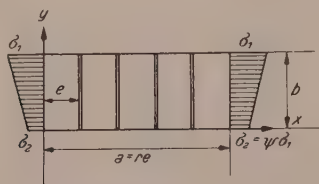


Abb. 1 a. Rechteckplatte unter Normalkräften

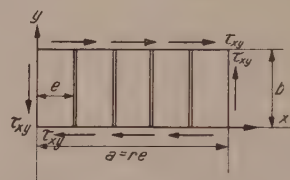


Abb. 1 b. Rechteckplatte unter Schubkräften

$$n_x = \sigma_1 t \left[\psi + (1 - \psi) \frac{y}{b} \right]$$

$$n_{xy} = \tau_{xy} t.$$

Die kritische Spannung σ_k kann nach Bryan⁴ aus der Bedingung berechnet werden, daß beim Übergang aus der labilen ebenen Form $w = 0$ in die unendlich wenig ausgebogene Beulfläche $w = w(x, y)$ die Änderung der Arbeit der inneren Kräfte A_i der bei der Verwölbung geleisteten zusätzlichen Arbeit der äußeren Kräfte A_a gleich sein muß. Die Änderung der potentiellen Energie ist daher

$$\Delta U = 0 = A_i + A_a. \quad (3)$$

Bei der Auswölbung verbiegen sich im allgemeinen sowohl die Platte als auch die Steifen und liefern Beiträge zur Änderung der Gesamtarbeit. Wir ziehen nur Quersteifen in Betracht. Diese bleiben infolge Vernachlässigung der Querdehnung bis zum Beginn des Ausbeulens spannungsfrei. Außerdem wird zur Vereinfachung der Rechnung der Verdrehungswiderstand der Stützen nicht berücksichtigt. Somit liefern diese nur Beiträge zur Biegearbeit der inneren Kräfte. Es ist

$$\Delta U = 0 = A_{iPl} + \sum_j A_{iQ} + A_{aPl}, \quad (3a)$$

wobei die Summe über alle Quersteifen geht.

Damit die ebene Ausgangslage der Platte nicht bereits labil ist, muß für jede Nachbarlage, die nicht Gleichgewichtslage ist,

$$0 < A_i + A_a$$

sein. Zu Gl. (3) tritt deshalb die verschärfte Bedingung, daß ΔU ein Minimum werden muß,

$$\delta \Delta U = 0 = \delta \left(A_{iPl} + \sum_j A_{iQ} + A_{aPl} \right). \quad (4)$$

⁴ Bryan: Proc. Lond. math. Soc. 54 (1891).

Die Ausdrücke für die einzelnen Arbeitsanteile sind:

$$A_{iPl} = K \int_F \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dF, \quad (5)$$

$$A_{aPl} = \int_F \left[\frac{n_x}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + n_x \nu \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{n_y}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dF, \quad (6)$$

$$\sum_j A_{iQ} = \frac{EI_Q}{2} \sum_j \int_0^{b_j} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x_j}^2 dy. \quad (7)$$

Für die vorerst unbekannte Wölfläche $w = w(x, y)$ muß ein Ansatz verwendet werden, der möglichst gut den Randbedingungen entspricht und sich weitgehend der wirklichen Beulfläche anpaßt. Vielfach ist es notwendig, einen Reihenansatz zu wählen, der im allgemeinen nur brauchbar ist, wenn die Abweichungen von der tatsächlichen Biegungsfläche durch Vermehrung der Gliederzahl beliebig verkleinert werden können. Der Naviersche Ansatz

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (8)$$

wenn m und n die Halbwellenzahlen in der Längs- und Querrichtung sind, erfüllt diese Forderungen für die allseitig frei drehbar gelagerte Rechteckplatte.

Die Arbeitsanteile Gl. (5) bis Gl. (7) mit Gl. (8) müssen gemäß Gl. (3a) zusammengefaßt werden. Durch partielle Differentiation nach den unbekannten Amplituden gemäß Gl. (4) entsteht ein Gleichungssystem mit ebenso vielen homogenen und linearen Gleichungen, wie Unbekannte vorhanden sind. Da eine von Null verschiedene Ausbeulung nur möglich ist, wenn die Koeffizientendeterminante D verschwindet, lautet die gesuchte Beulbedingung

$$D = 0. \quad (9)$$

Daraus kann die kritische Last zum Beispiel mittels des Laplaceschen Entwicklungssatzes durch Heranziehung einer zunehmenden Anzahl von Amplitudengliedern beliebig genau ermittelt werden. Praktisch ist jedoch wegen des raschen Anwachsens der Rechenarbeit die Genauigkeit auf wenige Glieder beschränkt, wodurch die Konvergenz der Näherungslösungen entscheidende Bedeutung gewinnt. Die Beulwerte werden durch das Energieverfahren von oben angenähert, so daß für vorgegebene Beulwerte die Annäherung der erforderlichen Stützensteifigkeiten von unten geschieht.

2. Die Konvergenzeigenschaften der Näherungslösungen für die unversteifte, lange Rechteckplatte.

Eine kurze Betrachtung von an der unversteiften Platte nachweisbaren Verhältnissen soll uns Richtlinien für die Erfassung auch komplizierterer Plattentypen verschaffen. Bekanntlich beeinträchtigt bei der allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte unter Längsbeanspruchung gemäß Gl. (1) das zunehmende Seitenverhältnis die Konvergenz der Näherungslösungen nicht. Die höheren Glieder lassen sich nämlich auf die Beullänge

$$\lambda = \frac{a}{m}, \quad (10)$$

welche durch den jeweils kleinsten Beulwert bestimmt ist, zurückführen (vgl. etwa Stiffel⁵, S. 370 für reine Biegung $\psi = -1$).

Die genaue Kurve der Beulwerte für die schubbelastete Rechteckplatte in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis fällt nach Seydel⁶, S. 183ff., in flachen Girlanden zu dem von Southwell und Skan⁷ für $\alpha = \infty$ streng gefundenen Wert $k = 5.336$ ab, indem der Kurvenast für gerade mit dem für ungerade Zeigersummen $m + n$ abwechselt. Hartmann⁸, S. 202, Abb. 183, trägt zum Vergleich dazu die mit den ersten fünf Amplitudengliedern gerechneten Beulwerte k_5 auf, welche für $\alpha > 2.0$ zunehmend schlecht konvergieren. Für die weiteren Näherungen k_7 , k_9 usw. ist ein ähnlicher Verlauf bei entsprechend größeren Seitenverhältnissen zu erwarten. Nun läßt sich diese Erscheinung leicht erklären. Mit wachsender Plattenlänge vergrößert sich auch die Zahl m der bei der Beulung entstehenden Längswellen. Dementsprechend wird der Einfluß der langen Wellen, in der Koeffizientendeterminante gemäß Gl. (9) der Glieder mit kleinen Zeigern m , absinken. Die maßgebenden Amplitudenglieder müssen, entsprechend der Gestalt der Beulfläche, stets in der Umgebung der Beulänge liegen. Die durch Hartmann aufgezeigte Verschlechterung der Konvergenzeigenschaften mit zunehmender Plattenlänge ist also vor allem dadurch bedingt, daß ungeachtet der wirklichen Beulform immer mit denselben Gliedern gerechnet wurde (vgl. in diesem Zusammenhang die dem Seitenverhältnis angepaßte, daher richtige Auswahl der Zeiger m bei Seydel⁶, S. 186, Abb. 7).

3. Die querversteifte Rechteckplatte unter Längsbeanspruchung. Der Übergang zur langen Platte.

Wir bilden die partiellen Ableitungen der Gl. (8).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\pi}{a} \sum_m \sum_n m A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{\pi^2}{a^2} \sum_m \sum_n m^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\pi}{b} \sum_m \sum_n n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{\pi^2}{b^2} \sum_m \sum_n n^2 A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\pi^2}{ab} \sum_m \sum_n mn A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Unter Benützung dieser Ableitungen werden nun die Arbeitsanteile Gl. (5) bis Gl. (7) ausgerechnet. Für den Fall der an allen Rändern gelenkig gelagerten Rechteckplatte (das heißt für die Randbedingungen $w = 0$ und $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$) vereinfacht sich die Bieigungsarbeit Gl. (5) zu

$$A_{iPl} = \frac{K}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy,$$

(s. beispielsweise Timoschenko⁹, S 315). Es wird

⁵ Stiffel: Bau-Ing. 367 (1941).

⁶ Seydel: Ingenieur-Arch. 169 (1933).

⁷ Southwell und Skan: Proc. Roy. Soc. (London) (1924).

⁸ Hartmann: Der Brückenbau, 3. Bd. Wien. 1951.

⁹ Timoschenko: Theory of Elastic Stability. New York. 1931.

$$\begin{aligned}
 A_{iPl} &= \frac{K}{2} \int_0^a \int_0^b \left[-\pi^2 \sum_m \sum_n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx dy \\
 &= K \frac{\pi^4}{4} \int_0^a \int_0^b \left[\sum_m \sum_p \sum_n \sum_q \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot A_{mn} A_{pq} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{q\pi y}{b} \right] dx dy.
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{u\pi x}{a} \sin \frac{v\pi x}{a} dx &= \int_0^a \cos \frac{u\pi x}{a} \cos \frac{v\pi x}{a} dx = 0 && \text{für } u \neq v, \\ &= \frac{a}{2} && \text{für } u = v \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

bleiben nur die Glieder mit $p = m$ und $q = n$,

$$A_{iPl} = \frac{\pi^4}{8} K \frac{b}{a^3} \sum_m \sum_n m^4 R_{mn} A_{mn}^2, \quad (13)$$

worin

$$R_{mn} = \left(1 + \frac{n^2}{m^2} \alpha^2 \right)^2 \quad (14)$$

ist. Die Arbeit bei der Biegung der Quersteifen ist gemäß Gl. (7) und Gl. (11), mit

$$\xi_j = \frac{x_j}{a}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_j A_{iQ} &= \frac{EI_Q}{2} \sum_j \int_0^b \left[-\frac{\pi^2}{b^2} \sum_m \sum_n n^2 A_{mn} \sin m\pi \xi_j \sin \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dy \\
 \sum_j A_{iQ} &= \frac{\pi^4}{4} \frac{EI_Q}{b^3} \sum_j \sum_n n^4 \left(\sum_m A_{mn} \sin m\pi \xi_j \right)^2.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Bei der Ermittlung der äußeren Arbeit gemäß Gl. (6) ist

$$n_x = -k \sigma_e t \left[\psi + (1 - \psi) \frac{y}{b} \right]$$

und $n_{xy} = n_y = 0$ zu setzen. Dann wird

$$A_{aPl} = -\frac{1}{2} k \sigma_e t \int_0^a \int_0^b \left[\psi + (1 - \psi) \frac{y}{b} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy.$$

Für das erste Glied in der eckigen Klammer ergibt sich

$$\psi \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy =$$

$$= \psi \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^a \int_0^b \left(\sum_m \sum_p \sum_n \sum_q m p A_{mn} A_{pq} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{q\pi y}{b} \right) dx dy$$

und weil gemäß Gl. (12) nur die Glieder $p = m$ und $q = n$ von Null verschieden sind,

$$\psi \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = \psi \frac{\pi^2}{4} \frac{b}{a} \sum_m \sum_n m^2 A_{mn}^2.$$

Beim zweiten Glied

$$\frac{1-\psi}{b} \int_0^a \int_0^b y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{(1-\psi)}{2} \frac{\pi^2}{ab} \sum_m m^2 \int_0^b y \left(\sum_n \sum_q A_{mn} A_{mq} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{q\pi y}{b} \right) dy$$

ist

$$\int_0^a y \sin \frac{u\pi y}{a} \sin \frac{v\pi y}{a} dy = 0 \quad \text{für } u+v \text{ gerade,}$$

$$= -\frac{4}{\pi^2} b^2 \frac{uv}{(u^2-v^2)^2} \quad \text{für } u+v \text{ ungerade,}$$

$$= \frac{b^2}{4} \quad \text{für } u=v$$
(17)

möglich, wodurch

$$\frac{1-\psi}{b} \int_0^a \int_0^b y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = (1-\psi) \frac{\pi^2}{8} \frac{b}{a} \sum_m m^2 A_{mn}^2 -$$

$$- 2(1-\psi) \frac{b}{a} \sum_m \sum_n \sum_q \frac{m^2 n q}{(n^2 - q^2)^2} A_{mn} A_{mq}$$

wird. Die Arbeit der äußeren Kräfte ist demnach

$$A_{apl} = -\frac{1}{2} k \sigma_e t \frac{b}{a} \sum_m m^2 \left[(1+\psi) \frac{\pi^2}{8} \sum_n A_{mn}^2 - \right.$$

$$\left. - 2(1-\psi) \sum_n \sum_q \frac{n q}{(n^2 - q^2)^2} A_{mn} A_{mq} \right].$$
(18)

Die Arbeitsanteile müssen jetzt gemäß Gl. (3) zusammengefaßt werden.

$$\Delta U = 0 = \frac{\pi^2}{8} \frac{b}{a} \sum_m \sum_n \left(\pi^2 \frac{K}{a^2} m^4 R_{mn} - \frac{1+\psi}{2} k \sigma_e t m^2 \right) A_{mn}^2 +$$

$$+ (1-\psi) k \sigma_e t \frac{b}{a} \sum_m \sum_n \sum_q \frac{m^2 n q}{(n^2 - q^2)^2} A_{mn} A_{mq} +$$

$$+ \frac{\pi^4}{4} E I_Q \frac{1}{b^3} \sum_j \sum_n n^4 \left(\sum_m A_{mn} \sin m \pi \xi_j \right)^2.$$

Die Minimalbedingung liefert

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{mn}} = 0 = \left(R_{mn} - \frac{1+\psi}{2 m^2} V_\alpha \right) A_{mn} + \frac{1-\psi}{2 m^2} W_\alpha \sum_q \frac{n q}{(n^2 - q^2)^2} A_{mq} +$$

$$+ S_{Q\alpha} \frac{n^4}{m^4} \sum_k A_{kn} \sum_j \sin k \pi \xi_j \sin m \pi \xi_j$$
(19)

mit den Abkürzungen

$$V_\alpha = k \alpha^2, \quad W_\alpha = \frac{16}{\pi^2} k \alpha^2,$$
(20)

$$S_{Q\alpha} = 2 \gamma_Q \alpha^3, \quad \gamma_Q = \frac{E I_Q}{K b}.$$
(21)

Gemäß Abschnitt 2 ist bei langen Platten die richtige Auswahl der Amplitudenglieder für die Brauchbarkeit der Näherungslösungen ausschlaggebend. Sie könnte letztlich durch Probieren getroffen werden, ist jedoch praktisch — wegen der unendlichen Gliederzahl der Lösungsdeterminanten — nur auf Grund einer Abschätzung der zu erwartenden Biegungsfläche denkbar. Für die Ermittlung der Mindeststeifigkeit von Stützen ist es die Beufläche, welche erzwungen wird, solange die Biegesteifigkeit der Stützen wenig unter der Mindeststeifigkeit liegt. Sobald die Mindest-

steifigkeit erreicht wird, tritt ein Wechsel des Beultypus von der Form mit stark ausgebogenen zu der mit fast oder exakt gerade bleibenden Steifen ein.

Die Fähigkeit elastischer Stützen, an den Steifenorten Knotenlinien zu erzwingen, ist nach Kromm³ an zwei Voraussetzungen gebunden. Erstens müssen die Steifen in den Knotenlinien einer möglichen Gleichgewichtslage der unversteiften Platte liegen, und zweitens darf es keine Beulfigur mit erzwungenen Knotenlinien an den Rippen geben, zu der eine kleinere Beulspannung gehört als zu der freien Beulform mit Knotenlinien an denselben Stellen. Nur dann liegt eine Mindeststeifigkeit erster Art vor, welche physikalisch dadurch gekennzeichnet ist, daß eine Verstärkung der Rippen keine weitere Erhöhung der kritischen Last bewirkt.

Wir beschränken unsere Untersuchungen auf gleiche Quersteifenentfernungen e . In diesem Falle sind bei Längsbelastung die Voraussetzungen für Mindeststeifigkeiten erster Art erfüllt. Nun stimmt, wenn die Rippen mindeststeif sind, die Beullänge der querversteiften Platte mit dem bezogenen Steifenabstand

$$\varepsilon = \frac{e}{b} \quad (22)$$

überein. Die Beulwellenzahl ist dann gleich der Anzahl der Steifenfelder (s. Abb. 1a und 1b)

$$r = \frac{\alpha}{\varepsilon}. \quad (23)$$

Um sie herum müssen die maßgebenden Längswellenzahlen

$$m = r + m_1 \quad (24)$$

liegen, wenn r und m_1 ganze Zahlen sind und m_1 aus dem negativen Endlichen positiv in das Unendliche geht. Aus Gl. (19) wird damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+m_1, n}} = 0 = & \left[R_{r+m_1, n} - \frac{(1+\psi) r^2}{2(r+m_1)^2} V_\varepsilon \right] A_{r+m_1, n} + \\ & + \frac{(1-\psi) r^2}{2(r+m_1)^2} W_\varepsilon \sum_q \frac{n q}{(n^2 - q^2)^2} A_{r+m_1, q} + \\ & + \frac{n^4 r^3}{(r+m_1)^4} S_{Q\varepsilon} \sum_k A_{k, n} \sum_{j=1}^{r-1} \sin \frac{k \pi j}{r} \sin \frac{(r+m_1) \pi j}{r}, \end{aligned} \quad (25)$$

worin

$$R_{r+m_1, n} = \left[1 + \frac{n^2 r^2}{(r+m_1)^2 \varepsilon^2} \right]^2 \quad (26)$$

ist und V_ε , W_ε , $S_{Q\varepsilon}$ Gl. (20) und Gl. (21), mit ε anstatt α , entsprechen. Die Steifenarbeit in Gl. (25) läßt sich nach Torre¹⁰, S. 141, geschlossen ausdrücken, weil

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{a-1} \sin \frac{u \pi j}{a} \sin \frac{v \pi j}{a} &= + \frac{a}{2} \quad \text{für } u = v, \\ &= \pm \frac{a}{2} \quad \text{für } u = 2 s a \pm v, \quad s = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ist. Zur besseren Übersicht ist die Koeffizientendeterminante Gl. (25) in Tab. 1 neungliedrig angeschrieben. Für $r = 2$ (eine Steife in Feldmitte) und $\psi = -1$

¹⁰ Torre: Österr. Ingenieur-Arch. 137 (1946).

Tabelle 1. Gleichungssystem Gl. (25) (querversteifte

	$A_{r-1,1}$	$A_{r-1,2}$	$A_{r-1,3}$	A_{r1}
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,1}} = 0 =$	$-\frac{R_{r-1,1} - (1+\psi)r^2}{2(r-1)^2} V_\varepsilon + \frac{r^4}{2(r-1)^4} S Q_\varepsilon$	$+\frac{(1-\psi)r^2}{9(r-1)^2} W_\varepsilon$		
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,2}} = 0 =$	$+\frac{(1-\psi)r^2}{9(r-1)^2} W_\varepsilon$	$-\frac{R_{r-1,2} - (1+\psi)r^2}{2(r-1)^2} V_\varepsilon + \frac{8r^4}{(r-1)^4} S Q_\varepsilon$	$+\frac{3(1-\psi)r^2}{25(r-1)^2} W_\varepsilon$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,3}} = 0 =$		$+\frac{3(1-\psi)r^2}{25(r-1)^2} W_\varepsilon$	$-\frac{R_{r-1,3} - (1+\psi)r^2}{2(r-1)^2} V_\varepsilon + \frac{81r^4}{2(r-1)^4} S Q_\varepsilon$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r1}} = 0 =$				$R_{r1} - \frac{(1+\psi)}{2} V_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r2}} = 0 =$				
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r3}} = 0 =$				
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+1,1}} = 0 =$	$-\frac{r^4}{2(r+1)^4} S Q_\varepsilon$			
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+1,2}} = 0 =$		$-\frac{8r^4}{(r+1)^4} S Q_\varepsilon$		
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+1,3}} = 0 =$			$-\frac{81r^4}{2(r+1)^4} S Q_\varepsilon$	

(reine Biegung) führt sie auf die von Stiffel⁵, S. 371, entwickelte und ausgewertete Determinante.

4. Anwendungsbeispiel: Der querversteifte Plattenstreifen unter gleichmäßigem Druck ($\psi = +1$).

Der Sonderfall gleichmäßigen Druckes wird die im vorhergehenden abgeleiteten Zusammenhänge veranschaulichen. Wir gehen von der Rechteckplatte aus und setzen in Gl. (25) $\psi = +1$.

Rechteckplatte unter Längsbeanspruchung).

A_{r2}	A_{r3}	$A_{r+1,1}$	$A_{r+1,2}$	$A_{r+1,3}$
		$-\frac{r^4}{2(r-1)^4} S_{Q\varepsilon}$		
			$-\frac{8r^4}{(r-1)^4} S_{Q\varepsilon}$	
				$-\frac{81r^4}{2(r-1)^4} S_{Q\varepsilon}$
$R_{r2} - \frac{(1+\psi)}{2} V_\varepsilon$				
	$R_{r3} - \frac{(1+\psi)}{2} V_\varepsilon$			
		$\frac{R_{r+1,1} - (1+\psi)r^2}{2(r+1)^2} V_\varepsilon + \frac{r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\varepsilon}$	$+\frac{(1-\psi)r^2}{9(r+1)^2} W_\varepsilon$	
		$+\frac{(1-\psi)r^2}{9(r+1)^2} W_\varepsilon$	$\frac{R_{r+1,2} - (1+\psi)r^2}{2(r+1)^2} V_\varepsilon + \frac{8r^4}{(r+1)^4} S_{Q\varepsilon}$	$+\frac{3(1-\psi)r^2}{25(r+1)^2} W_\varepsilon$
			$+\frac{3(1-\psi)r^2}{25(r+1)^2} W_\varepsilon$	$\frac{R_{r+1,3} - (1+\psi)r^2}{2(r+1)^2} V_\varepsilon + \frac{81r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\varepsilon}$

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+m_1, n}} = 0 = \left[R_{r+m_1, n} - \frac{r^2}{(r+m_1)^2} V_\varepsilon \right] A_{r+m_1, n} + \frac{n^4 r^3}{(r+m_1)^4} S_{Q\varepsilon} \sum_k A_{kn} \sum_{j=1}^{r-1} \sin \frac{k\pi j}{r} \sin \frac{(r+m_1)\pi j}{r}. \quad (25a)$$

Die Koeffizientendeterminante Gl. (25a) baut sich, wie sofort zu sehen ist, in n aus unendlich vielen Unterdeterminanten auf. Den maßgebenden Ausschnitt einer beliebigen davon (für jeden Wert von n) zeigt als Beispiel Tab. 1a für sechs Steifen-

Tabelle 1a. Gleichungssystem Gl. (25a) für $r = 6$ (querversteifte Rechteckplatte unter gleichmäßigem Druck).

	A_{4n}	A_{5n}	A_{6n}	A_{7n}	A_{8n}
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{4n}} = 0 =$	$R_{4n} - \frac{9}{4} V_\varepsilon$ $+ \frac{81}{32} n^4 S_{Q\varepsilon}$				$-\frac{81}{32} n^4 S_{Q\varepsilon}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{5n}} = 0 =$		$R_{5n} - \frac{36}{25} V_\varepsilon$ $+ \frac{648}{625} n^4 S_{Q\varepsilon}$		$-\frac{648}{625} n^4 S_{Q\varepsilon}$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{6n}} = 0 =$			$R_{6n} - V_\varepsilon$		
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{7n}} = 0 =$		$-\frac{648}{2401} n^4 S_{Q\varepsilon}$		$R_{7n} - \frac{36}{49} V_\varepsilon$ $+ \frac{648}{2401} n^4 S_{Q\varepsilon}$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{8n}} = 0 =$	$-\frac{81}{512} n^4 S_{Q\varepsilon}$				$R_{8n} - \frac{9}{16} V_\varepsilon$ $+ \frac{81}{512} n^4 S_{Q\varepsilon}$

felder $r = 6$. Diese Determinante spaltet sich für die Längsrichtung in weitere Unterdeterminanten. Den kleinsten Beulwert gibt die Unterdeterminante mit A_{5n} und A_{7n} , das sind allgemein auf r bezogen $A_{r-1,n}$ und $A_{r+1,n}$. Die nächsten Glieder wären A_{17n} und A_{19n} , allgemein $A_{3r-1,n}$ und $A_{3r+1,n}$.

Die Steifenglieder gruppieren sich gemäß Gl. (27) diagonal um die der Steifenfelderzahl sowie deren ungeraden Vielfachen entsprechenden Elemente der Matrix. Mit zunehmender Anzahl der Steifenfelder rücken die höheren Glieder immer weiter ab, so daß sich die Konvergenz fortschreitend verbessert. Die zweigliedrige Näherung mit $A_{r-1,n}$ und $A_{r+1,n}$

$$\left[R_{r-1,n} - \frac{r^2}{(r-1)^2} V_\varepsilon + \frac{n^4 r^4}{2(r-1)^4} S_{Q\varepsilon} \right] \left[R_{r+1,n} - \frac{r^2}{(r+1)^2} V_\varepsilon + \frac{n^4 r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\varepsilon} \right] - \frac{n^8 r^8}{4(r-1)^4(r+1)^4} S_{Q\varepsilon} = 0$$

liefert, wenn man mit $\frac{(r^2-1)^2}{r^4 \varepsilon^4}$ erweitert und in Anlehnung an Fröhlich¹¹, S. 674

$$\Phi_{r+m_1,n} = \Phi_{(1+\beta)r,n} = \left[\frac{(1+\beta)^2}{\varepsilon^2} n^2 + 1 \right]^2 - \frac{(1+\beta)^2}{\varepsilon^2} k \quad (28)$$

einführt mit

$$\beta = \frac{m_1}{r}, \quad (29)$$

$$S_{Q\varepsilon} = -2\varepsilon^4 \frac{\Phi_{r-1,n} \Phi_{r+1,n}}{\Phi_{r-1,n} + \Phi_{r+1,n}}.$$

¹¹ Fröhlich: Bau-Ing. 673 (1937).

Als Größtwert findet man für $n = 1$ und für den Beulwert der Rechteckplatte vom Seitenverhältnis ε

$$k = \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right)^2 \quad (30)$$

(s. beispielsweise Timoschenko¹, S. 149) die Mindeststeifigkeit erster Art

$$\min \gamma_Q = -\varepsilon \frac{\Phi_{r-1} \Phi_{r+1}}{\Phi_{r-1} + \Phi_{r+1}}, \quad (31)$$

wobei die Zeiger $n = 1$ weggelassen wurden. Diese Vereinfachung soll für die weitere Rechnung beibehalten werden.

Beim Grenzübergang zum Plattenstreifen $r \rightarrow \infty$ wird für endliche m_1 gemäß Gl. (29) $\beta = 0$. Weil dann für k gemäß Gl. (30) auch $\Phi_r = 0$ wird, bilden wir

$$\begin{aligned} \Phi_{(1-\beta)r} \Phi_{(1+\beta)r} &= \frac{1}{\varepsilon^8} (1 - \beta^2)^4 + \frac{2(2-k)}{\varepsilon^6} (1 - \beta^2)^2 (1 + \beta^2) + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^4} [2(1 + 6\beta^2 + \beta^4) + (2-k)^2 (1 - \beta^2)^2] + \frac{2(2-k)}{\varepsilon^2} (1 + \beta^2) + 1 \end{aligned}$$

und

$$\Phi_{(1-\beta)r} + \Phi_{(1+\beta)r} = \frac{2}{\varepsilon^4} (1 + 6\beta^2 + \beta^4) + \frac{2(2-k)}{\varepsilon^2} (1 + \beta^2) + 2.$$

Mit $\beta = 0$ und k gemäß Gl. (30) verschwinden beide Ausdrücke, wodurch $\min \gamma_Q$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Deshalb wenden wir die Regel von De l'Hospital an.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} [\Phi_{(1-\beta)r} \Phi_{(1+\beta)r}] &= -\frac{8}{\varepsilon^8} \beta (1 - \beta^2)^3 + \frac{4(2-k)}{\varepsilon^6} \beta [(1 - \beta^2)^2 - 2(1 - \beta^2)(1 + \beta^2)] + \\ &+ \frac{4}{\varepsilon^4} \beta [2(3 + \beta^2) - (2-k)^2 (1 - \beta^2)] + \frac{4(2-k)}{\varepsilon^2} \beta \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \beta} [\Phi_{(1-\beta)r} + \Phi_{(1+\beta)r}] = \frac{4}{\varepsilon^3} \beta \left[\frac{2}{\varepsilon^2} (3 + \beta^2) + 2 - k \right]$$

führen neuerlich auf $\frac{0}{0}$. Erst die zweiten Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} [\Phi_{(1-\beta)r} \Phi_{(1+\beta)r}] &= -\frac{8}{\varepsilon^8} (1 - \beta^2)^2 [(1 - \beta^2) - 6\beta] + \frac{4(2-k)}{\varepsilon^6} \{ (1 - \beta^2)^2 - \\ &- 2(1 - \beta^4) - 4\beta^2 [(1 - \beta^2) - 2\beta^3] \} + \frac{4}{\varepsilon^4} [6(1 + \beta^2) - (2-k)^2 (1 - 3\beta^2)] + \frac{4(2-k)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} [\Phi_{(1-\beta)r} + \Phi_{(1+\beta)r}] = \frac{4}{\varepsilon^2} \left[\frac{6}{\varepsilon^2} (1 + \beta^2) + 2 - k \right]$$

geben die Mindeststeifigkeit des längsgedrückten Plattenstreifens

$$\min \gamma_Q = -\varepsilon \frac{(2-k)\varepsilon^6 + [6 - (2-k)^2\varepsilon^4] - (2-k)\varepsilon^2 - 2}{(2-k)\varepsilon^6 + 6\varepsilon^4} \quad (32)$$

mit k gemäß Gl. (30). Wie schon gesagt, verbessert sich die Konvergenz der Näherungslösungen mit wachsender Plattenlänge. Der Grenzfall Gl. (32) liefert genaue Werte. Tab. 2 enthält diese für verschiedene ε , außerdem die von Timoschenko¹ für eine und drei Querstreifen ($r = 2$ und $r = 4$) errechneten Steifigkeiten. In Abb. 2 sind die Werte der Tab. 2 aufgetragen.

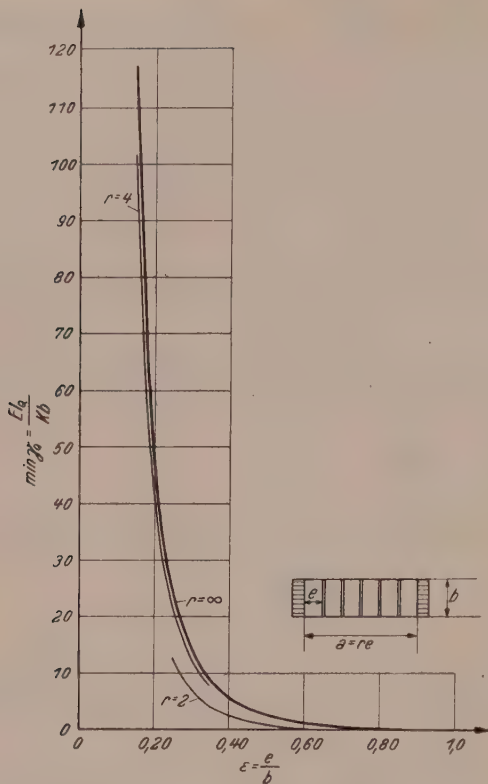


Abb. 2. Mindeststeifigkeiten der querversteiften Rechteckplatte unter gleichmäßigem Druck.

Vorzeichen könnte auch positiv genommen werden, da der Beulwert dadurch nicht beeinflusst wird) und $n_x = n_y = 0$ einzusetzen. Es wird dann

$$A_{aPl} = -k \sigma_e t \frac{\pi^2}{a b} \int_0^a \int_0^b \left(\sum_m \sum_p \sum_n \sum_q m q A_{mn} A_{pq} \cos \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{p \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \cos \frac{q \pi y}{b} \right) dx dy.$$

Wegen

$$\left. \begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{u \pi x}{a} \cos \frac{v \pi x}{a} dx &= 0 \quad \text{für } u = v \text{ und } u + v \text{ gerade,} \\ &= \frac{2a}{\pi} \frac{u}{(u^2 - v^2)} \quad \text{für } u + v \text{ ungerade} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ergibt sich

$$A_{aPl} = -4k \sigma_e t \sum_m \sum_p \sum_n \sum_q \frac{m p n q}{(p^2 - m^2)(n^2 - q^2)} A_{mn} A_{pq}. \quad (34)$$

Wir fassen nun Gl. (34) mit Gl. (13) und Gl. (16) zusammen.

$$\begin{aligned} \Delta U = 0 &= \frac{\pi^4}{8} K \frac{b}{a^3} \sum_m \sum_n m^4 R_{mn} A_{mn}^2 + \\ &+ 4k \sigma_e t \sum_m \sum_p \sum_n \sum_q \frac{m n p q}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} A_{mn} A_{pq} + \\ &+ \frac{\pi^4}{4} E I_Q \frac{1}{b^3} \sum_j \sum_n n^4 \left(\sum_m A_{mn} \sin m \pi \xi_j \right)^2. \end{aligned}$$

Tabelle 2. Mindeststeifigkeiten der querversteiften Rechteckplatte unter gleichmäßigem Druck. Werte für $r = 2$ und $r = 4$ nach Timoschenko.

$\varepsilon = \frac{e}{b}$	min γ_Q		
	$r = 2$	$r = 4$	$r = \infty$
0.15		101	118.4
0.20		42.6	49.86
0.25	12.75	21.7	25.42
0.30	7.24	12.4	14.60
0.35	4.42	7.7	
0.40	2.82		5.96
0.45	1.84		
0.50	1.29		2.85
0.60	0.435		1.44
0.707	0		
0.75			0.473
1.00			0

5. Die querversteifte lange Rechteckplatte unter Schubbeanspruchung.

Die Anteile der Biegearbeit der Platte und der Querstreifen wurden schon in Abschnitt 3, Gl. (13) und Gl. (16), ermittelt. Für die äußere Arbeit der Platte sind in Gl. (6) $n_{xy} = -k \sigma_e t$ (das

Unter Verwendung der Abkürzungen Gl. (21) und

$$T_{\alpha} = \frac{16}{\pi^2} k \alpha^3 \quad (35)$$

lautet die Minimalbedingung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta U}{\partial A_{m,n}} = 0 = R_{m,n} A_{m,n} + 2 T_{\alpha} \frac{n}{m^3} \sum_p \sum_q \frac{p q}{(m^2 - p^2)(n^2 - q^2)} A_{p,q} + \\ + \frac{n^4}{m^4} S_{Q\alpha} \sum_k A_{k,n} \sum_j \sin k \pi \xi_j \sin m \pi \xi_j. \end{aligned} \quad (36)$$

Die maßgebenden Glieder befinden sich, wie in Abschnitt 3 dargelegt wurde, in der Umgebung der Längswellenzahl r . Entsprechend Gl. (24) führen wir

$$m = r + m_1, \quad p = r + p_1$$

und gemäß Gl. (35) T_{ε} , mit ε anstatt α , ein. Und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+m_1,n}} = 0 = R_{r+m_1,n} A_{r+m_1,n} + \\ + \frac{2 n r^3}{(r+m_1)^3} T_{\varepsilon} \sum_{r+p_1} \sum_q \frac{(r+p_1) q}{(m_1-p_1)(2r+m_1+p_1)(n^2-q^2)} A_{r+p_1,q} + \\ + \frac{n^4 r^3}{(r+m_1)^4} S_{Q\varepsilon} \sum_k A_{k,n} \sum_{j=1}^{r-1} \sin \frac{k \pi j}{r} \sin \frac{(r+m_1) \pi j}{r}. \end{aligned} \quad (37)$$

Das System Gl. (37) zerfällt in zwei Gleichungssysteme mit geraden und mit ungeraden Zeigersummen $m_1 + n$ (vgl. etwa Timoschenko¹, S. 156, für die unversteifte Rechteckplatte). Gerechnet muß jeweils mit demjenigen werden, welches die größeren Stützensteifigkeiten liefert. Tab. 3 zeigt das Gleichungssystem Gl. (37) für gerade $m_1 + n$ neungliedrig aufgeschrieben.

Der Ermittlung von Mindeststeifigkeiten legten Timoschenko¹ und Way¹² die Beulwerte der allseitig frei drehbar gelagerten Rechteckplatte mit dem Seitenverhältnis ε zugrunde. Da die unversteifte schubbelastete Rechteckplatte keine Eigenfunktion mit zu den Rändern parallelen Knotenlinien besitzt, wodurch die erste der von Kromm³ angegebenen Voraussetzungen nicht erfüllt ist, kann es sich nicht um Mindeststeifigkeiten erster Art handeln. Für diese den Beulwerten der an allen Rändern gelenkig gelagerten Platte entsprechenden Stützensteifigkeiten führte Chwalla¹³ den Begriff der Mindeststeifigkeiten dritter Art ein.

6. Der Grenzfall des Plattenstreifens.

Entwicklung und Auswertung der Beulbedingung.

Wir führen zunächst in Gl. (37) entsprechend Gl. (29)

$$\beta = \frac{m_1}{r}, \quad \zeta = \frac{p_1}{r}$$

ein. Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+m_1,n}} = 0 = R_{r+m_1,n} A_{r+m_1,n} + \\ + \frac{2 n}{(1+\beta)^3} T_{\varepsilon} \sum_{r+p_1} \sum_q \frac{(1+\zeta) q}{(m_1-p_1)(2+\beta+\zeta)(n^2-q^2)} A_{r+p_1,q} + \\ + \frac{n^4}{(1+\beta)^4 r} S_{Q\varepsilon} \sum_k A_{k,n} \sum_{j=1}^{r-1} \sin \frac{k \pi j}{r} \sin (1+\beta) \pi j. \end{aligned}$$

¹² Way: 2. Kongr. d. Int. Ver. f. Br. Hochb., Berlin 1936, Schlußbericht S. 628.

¹³ Chwalla: Stahlbau 84 (1944).

Tabelle 3. Gleichungssystem Gl. (37) für $m_1 + n$ gerade

	$A_{r-1,1}$	$A_{r-1,3}$	$A_{r-1,5}$	$A_{r,2}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,1}} = 0 =$	$\frac{R_{r-1,1} +}{r^4} + \frac{S_{Q\epsilon}}{2(r-1)^4}$			$+\frac{4r^4 T_\epsilon}{3(2r-1)(r-1)^3}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,3}} = 0 =$		$\frac{R_{r-1,3} +}{81r^4} + \frac{S_{Q\epsilon}}{2(r-1)^4}$		$-\frac{12r^4 T_\epsilon}{5(2r-1)(r-1)^3}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,5}} = 0 =$			$\frac{R_{r-1,5} +}{625r^4} + \frac{S_{Q\epsilon}}{2(r-1)^4}$	$-\frac{20r^4 T_\epsilon}{21(2r-1)(r-1)^3}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r,2}} = 0 =$	$+\frac{4(r-1) T_\epsilon}{3(2r-1)}$	$-\frac{12(r-1) T_\epsilon}{5(2r-1)}$	$-\frac{20(r-1) T_\epsilon}{21(2r-1)}$	$R_{r,2}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r,4}} = 0 =$	$+\frac{8(r-1) T_\epsilon}{15(2r-1)}$	$+\frac{24(r-1) T_\epsilon}{7(2r-1)}$	$-\frac{40(r-1) T_\epsilon}{9(2r-1)}$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r,6}} = 0 =$	$+\frac{12(r-1) T_\epsilon}{35(2r-1)}$	$+\frac{4(r-1) T_\epsilon}{3(2r-1)}$	$+\frac{60(r-1) T_\epsilon}{11(2r-1)}$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+1,1}} = 0 =$	$-\frac{r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\epsilon}$			$-\frac{4r^4 T_\epsilon}{3(2r+1)(r+1)^3}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+1,3}} = 0 =$		$-\frac{81r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\epsilon}$		$+\frac{12r^4 T_\epsilon}{5(2r+1)(r+1)^3}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+1,5}} = 0 =$			$-\frac{625r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\epsilon}$	$+\frac{20r^4 T_\epsilon}{21(2r+1)(r+1)^3}$

Der Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ bringt für den querversteiften Plattenstreifen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+m_1, n}} = 0 = & L_n A_{r+m_1, n} + n T_\epsilon \sum_{r+p_1, q} \frac{q}{(m_1 - p_1)(n^2 - q^2)} A_{r+p_1, q} + \\ & + \frac{n^4}{2} S_{Q\epsilon} (A_{r+m_1, n} - A_{r-m_1, n}), \end{aligned} \quad (38)$$

mit

$$L_n = (1 + n^2 \epsilon^2)^2. \quad (39)$$

Das Gleichungssystem Gl. (38) stimmt, wenn man von der unterschiedlichen Bezeichnung absieht, bis auf die neu hinzutretenden Steifenglieder mit dem von Seydel⁶, S. 173, für den unversteiften Plattenstreifen angegebenen überein. Es zerfällt ebenso wie das der Rechteckplatte Gl. (37) in zwei Systeme, von denen Tab. 4 das mit geraden Summen $m_1 + n$ für die Zeiger $r - 2$ bis $r + 2$ in der Längsrichtung und $n = 1$ bis 5 in der Querrichtung zehngliedrig aufgezeichnet enthält.

Die Auflösung der Beulbedingung vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Symmetrie- und Antimetrieeigenschaften der Biegungsfläche

$$\begin{aligned} A_{r+m_1, n} &= A_{r-m_1, n} \quad \text{für gerade } n, \\ A_{r+m_1, n} &= -A_{r-m_1, n} \quad \text{für ungerade } n \end{aligned}$$

(querversteifte Rechteckplatte unter Schubbeanspruchung).

A_{r4}	A_{r6}	$A_{r+1,1}$	$A_{r+1,3}$	$A_{r+1,5}$
$+\frac{8r^4 T_\varepsilon}{15(2r-1)(r-1)^3}$	$+\frac{12r^4 T_\varepsilon}{35(2r-1)(r-1)^3}$	$-\frac{r^4}{2(r-1)^4} S_{Q\varepsilon}$		
$+\frac{24r^4 T_\varepsilon}{7(2r-1)(r-1)^3}$	$+\frac{4r^4 T_\varepsilon}{3(2r-1)(r-1)^3}$		$-\frac{81r^4}{2(r-1)^4} S_{Q\varepsilon}$	
$+\frac{40r^4 T_\varepsilon}{9(2r-1)(r-1)^3}$	$+\frac{60r^4 T_\varepsilon}{11(2r-1)(r-1)^3}$			$-\frac{625r^4}{2(r-1)^4} S_{Q\varepsilon}$
		$-\frac{4(r+1)T_\varepsilon}{3(2r+1)}$	$+\frac{12(r+1)T_\varepsilon}{5(2r+1)}$	$+\frac{20(r+1)T_\varepsilon}{21(2r+1)}$
R_{r4}		$-\frac{8(r+1)T_\varepsilon}{15(2r+1)}$	$-\frac{24(r+1)T_\varepsilon}{7(2r+1)}$	$+\frac{40(r+1)T_\varepsilon}{9(2r+1)}$
	R_{r6}	$-\frac{12(r+1)T_\varepsilon}{35(2r+1)}$	$-\frac{4(r+1)T_\varepsilon}{3(2r+1)}$	$-\frac{60(r+1)T_\varepsilon}{11(2r+1)}$
$-\frac{8r^4 T_\varepsilon}{15(2r+1)(r+1)^3}$	$-\frac{12r^4 T_\varepsilon}{35(2r+1)(r+1)^3}$	$R_{r+1,1} + \frac{r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\varepsilon}$		
$-\frac{24r^4 T_\varepsilon}{7(2r+1)(r+1)^3}$	$-\frac{4r^4 T_\varepsilon}{3(2r+1)(r+1)^3}$		$R_{r+1,3} + \frac{81r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\varepsilon}$	
$+\frac{40r^4 T_\varepsilon}{9(2r+1)(r+1)^3}$	$-\frac{60r^4 T_\varepsilon}{11(2r+1)(r+1)^3}$			$R_{r+1,5} + \frac{625r^4}{2(r+1)^4} S_{Q\varepsilon}$

beachtet. Im Falle der zehngliedrigen Determinante Tab. 4 ist überdies

$$A_{r2} = -3A_{r-2,2}, \quad A_{r4} = -3A_{r-2,4},$$

wodurch sich schließlich die viergliedrige Determinante Tab. 4a ergibt. Auf diese Weise ist es möglich, unter Berücksichtigung von verhältnismäßig vielen Amplitudengliedern gute Näherungslösungen zu erhalten. Wir geben nur einige der von uns ausgewerteten angenäherten Beulbedingungen an und beginnen bei der einfachsten, aus drei Gliedern mit $m_1 = -1$ bis $+1$, $n = 1, 2$ gewonnenen

$$L_2 S_{Q\varepsilon} - \frac{8}{9} T_\varepsilon^2 + L_1 L_2 = 0. \quad (40a)$$

Für fünf Glieder mit $m_1 = -2$ bis $+2$, $n = 1, 2$ ist

$$L_2 S_{Q\varepsilon} - \frac{88}{81} T_\varepsilon^2 + L_1 L_2 = 0, \quad (40b)$$

für sieben Glieder mit $m_1 = -2$ bis $+2$, $n = 1$ bis 3

$$\begin{aligned} 81 L_2 S_{Q\varepsilon}^2 - \left[\frac{2288}{25} T_\varepsilon^2 - (81 L_1 + L_3) L_2 \right] S_{Q\varepsilon} - \\ - 88 \left(\frac{1}{25} L_1 + \frac{1}{81} L_3 \right) T_\varepsilon^2 + L_1 L_2 L_3 = 0, \end{aligned} \quad (40c)$$

Tabelle 4. Gleichungssystem Gl. (38) für $m_1 + n$ gerade

	$A_{r-2,2}$	$A_{r-2,4}$	$A_{r-1,1}$	$A_{r-1,3}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-2,2}} = 0 =$	$L_2 + 8 S Q_\varepsilon$		$-\frac{2}{3} T_\varepsilon$	$+\frac{6}{5} T_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-2,4}} = 0 =$		$L_4 + 128 S Q_\varepsilon$	$-\frac{4}{15} T_\varepsilon$	$-\frac{12}{7} T_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,1}} = 0 =$	$-\frac{2}{3} T_\varepsilon$	$-\frac{4}{15} T_\varepsilon$	$L_1 + \frac{1}{2} S Q_\varepsilon$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,3}} = 0 =$	$+\frac{6}{5} T_\varepsilon$	$-\frac{12}{7} T_\varepsilon$		$L_3 + \frac{81}{2} S Q_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r2}} = 0 =$			$+\frac{2}{3} T_\varepsilon$	$-\frac{6}{5} T_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r4}} = 0 =$			$+\frac{4}{15} T_\varepsilon$	$+\frac{12}{7} T_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+1,1}} = 0 =$	$-\frac{2}{9} T_\varepsilon$	$-\frac{4}{45} T_\varepsilon$	$-\frac{1}{2} S Q_\varepsilon$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+1,3}} = 0 =$	$+\frac{2}{5} T_\varepsilon$	$-\frac{4}{7} T_\varepsilon$		$-\frac{81}{2} S Q_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+2,2}} = 0 =$	$-8 S Q_\varepsilon$		$+\frac{2}{9} T_\varepsilon$	$-\frac{2}{5} T_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r+2,4}} = 0 =$		$-128 S Q_\varepsilon$	$+\frac{4}{45} T_\varepsilon$	$+\frac{4}{7} T_\varepsilon$

Tabelle 4a. Vereinfachte zehngliedrige Determinante der Tab. 4 (querversteifter Plattenstreifen unter Schubbeanspruchung).

	$A_{r-2,2}$	$A_{r-2,4}$	$A_{r-1,1}$	$A_{r-1,3}$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-2,2}} = 0 =$	L_2		$-\frac{4}{9} T_\varepsilon$	$-\frac{4}{5} T_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-2,4}} = 0 =$		L_4	$+\frac{8}{45} T_\varepsilon$	$-\frac{8}{7} T_\varepsilon$
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,1}} = 0 =$	$-\frac{22}{9} T_\varepsilon$	$+\frac{44}{45} T_\varepsilon$	$L_1 + S Q_\varepsilon$	
$\frac{\partial \Delta U}{\partial A_{r-1,3}} = 0 =$	$-\frac{22}{5} T_\varepsilon$	$-\frac{44}{7} T_\varepsilon$		$L_3 + 81 S Q_\varepsilon$

Tabelle 5. Angenäherte Mindeststeifigkeiten des querversteiften Plattenstreifens unter Schubbeanspruchung.

ε	$k(\varepsilon)$	Berücksichtigte Gliederzahl					
		3	5	7	11	10	15
		$m_1 = -1 \text{ bis } +1$ $n = 1, 2$	$m_1 = -2 \text{ bis } +2$ $n = 1, 2$	$m_1 = -2 \text{ bis } +2$ $n = 1 \text{ bis } 3$	$m_1 = -3 \text{ bis } +3$ $n = 1 \text{ bis } 3$	$m_1 = -2 \text{ bis } +2$ $n = 1 \text{ bis } 4$	$m_1 = -2 \text{ bis } +2$ $n = 1 \text{ bis } 6$
0.4	38.75	31.22				44.15	
0.5	25.88	18.20	23.63	25.09	25.47	25.60	25.70
0.6	18.67	10.49				14.92	
0.75	13.27	5.32				7.77	
1.0	9.35	2.08	2.99	3.26	3.31	3.31	3.32
1.25	7.76	0.933				1.72	

(querversteifter Plattenstreifen unter Schubbeanspruchung).

$A_{r,2}$	$A_{r,4}$	$A_{r+1,1}$	$A_{r+1,3}$	$A_{r+2,2}$	$A_{r+2,4}$
		$-\frac{2}{9} T_\varepsilon$	$+\frac{2}{5} T_\varepsilon$	$-8 S Q_\varepsilon$	
		$-\frac{4}{45} T_\varepsilon$	$-\frac{4}{7} T_\varepsilon$		$-128 S Q_\varepsilon$
$+\frac{2}{3} T_\varepsilon$	$+\frac{4}{15} T_\varepsilon$	$-\frac{1}{2} S Q_\varepsilon$		$+\frac{2}{9} T_\varepsilon$	$+\frac{4}{45} T_\varepsilon$
$-\frac{6}{5} T_\varepsilon$	$+\frac{12}{7} T_\varepsilon$		$-\frac{81}{2} S Q_\varepsilon$	$-\frac{2}{5} T_\varepsilon$	$+\frac{4}{7} T_\varepsilon$
L_2		$-\frac{2}{3} T_\varepsilon$	$+\frac{6}{5} T_\varepsilon$		
	L_4	$-\frac{4}{15} T_\varepsilon$	$-\frac{12}{7} T_\varepsilon$		
$-\frac{2}{3} T_\varepsilon$	$-\frac{4}{15} T_\varepsilon$	$L_1 + \frac{1}{2} S Q_\varepsilon$		$+\frac{2}{3} T_\varepsilon$	$+\frac{4}{15} T_\varepsilon$
$+\frac{6}{5} T_\varepsilon$	$-\frac{12}{7} T_\varepsilon$		$L_3 + \frac{81}{2} S Q_\varepsilon$	$-\frac{6}{5} T_\varepsilon$	$+\frac{12}{7} T_\varepsilon$
		$+\frac{2}{3} T_\varepsilon$	$-\frac{6}{5} T_\varepsilon$	$L_2 + 8 S Q_\varepsilon$	
		$+\frac{4}{15} T_\varepsilon$	$+\frac{12}{7} T_\varepsilon$		$L_4 + 128 S Q_\varepsilon$

Tabelle 6. Mindeststeifigkeiten der querversteiften Rechteckplatte unter Schubbeanspruchung. Werte für $r = 2$ nach Timoshenko und für $r = 3$ nach Way.

$\varepsilon = \frac{e}{b}$	min γ_Q		
	$r = 2$	$r = 3$	$r = \infty$
0.33		40	
0.4		27.6	44.3
0.5	15.0	16.95	25.7
0.6	9.96		15.0
0.67		7.2	
0.75	4.35		7.8
0.83		3.5	
1.0	1.66	2.01	3.32
1.25			1.72

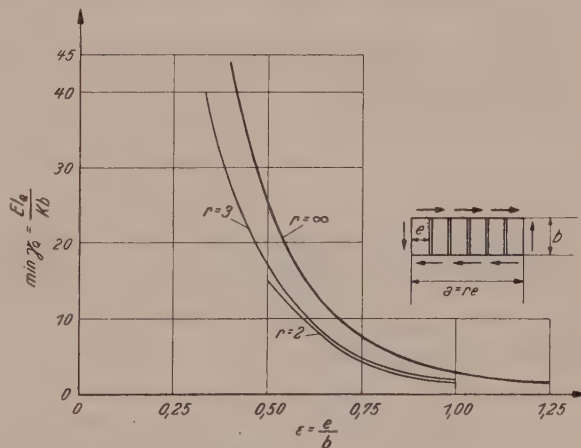


Abb. 3. Mindeststeifigkeiten der querversteiften Rechteckplatte unter Schubbeanspruchung.

für zehn Glieder mit $m_1 = -2$ bis $+2$, $n = 1$ bis 4

$$81 L_2 L_4 S Q_\varepsilon^2 - \left[\frac{176}{25} \left(\frac{148}{49} L_2 + 13 L_4 \right) T_\varepsilon^2 - (81 L_1 + L_3) L_2 L_4 \right] S Q_\varepsilon + \frac{31719424}{2480625} T_\varepsilon^4 - 88 \left(\frac{4}{49} L_1 L_2 + \frac{1}{25} L_1 L_4 + \frac{4}{2025} L_2 L_3 + \frac{1}{81} L_3 L_4 \right) T_\varepsilon^2 + L_1 L_2 L_3 L_4 = 0 \quad (40d)$$

usw.

Die aus den Beulbedingungen Gl. (40) mit den Beulwerten der allseitig gelenkig gelagerten Rechteckplatte unter Schubbelastung, welche z. B. bei Hartmann⁸, S. 202, Abb. 183, entnommen werden können, errechneten Mindeststeifigkeiten dritter Art sind in Tab. 5 übersichtlich zusammengefaßt. Das System Gl. (38) mit ungeraden Zeigersummen $m_1 + n$ liefert kleinere Werte, welche daher nicht maßgebend sind. Abb. 3 zeigt zusammen mit den Mindeststeifigkeiten, welche Timoschenko¹ und Way¹² — dieser allerdings weniger genau — für die einfach und zweifach ausgesteifte Rechteckplatte ($r = 2$ und $r = 3$) ermittelten, diejenigen des querversteiften Plattenstreifens aufgetragen.

(Eingegangen am 15. April 1952.)

Zur Theorie der durchlaufenden Fundamentplatten und Pilzdecken mit rechteckigen Last- oder Stützflächen.

Von W. Müller, München.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Auf dem Wege der Umformung der Leweschen Doppelreihen wird die Durchbiegung der durchgehenden rechteckigen Fundamentplatten auf elastischer Unterlage und der Pilzdecken unter der Voraussetzung berechnet, daß die Last- oder Stützflächen rechteckige Form. Der Pilzdeckenfall leitet sich durch einen Grenzübergang aus dem Fall der Fundamentplatte her. In den Ansätzen ist eine große Zahl von Sonderfällen enthalten, von denen einige kurz besprochen werden.

Summary. By the way of transforming the Lewe double series the deflexion of the continuous rectangular foundation plates on an elastic basis and of the flat slab floors is computed and ascertained on the assumption that the load- or supporting faces are of rectangular shape. The case of the flat slab floor represents a limit transition in respect to the case of the foundation plate. The formulae developed cover a great number of special cases of which a few are shortly discussed.

Résumé. Par la voie de la transformation des séries doubles de Lewe la flexion des plaques continues, rectangulaires de fondation à appui élastique et des dalles champignons est établie sous la supposition que les surfaces de charge ou d'appui aient une forme rectangulaire. Le cas de la dalle champignon représente une transition limite de la plaque de fondation. Les formules comprennent un grand nombre de cas spéciaux dont plusieurs font l'objet d'une discussion détaillée.

1. Einleitung. Wir gehen in der vorliegenden Untersuchung aus von einer unendlich ausgedehnten Fundamentplatte mit einem regelmäßigen orthogonalen Säulengitter mit den periodischen Abständen $2a$ und $2b$ zwischen den Säulenmittelpunkten, während der rechteckige Grundquerschnitt einer nach den Hauptrichtungen orientierten Säule die Seiten $2a\alpha$ und $2a\beta$ besitzen möge (Abb. 1). Wenn wir zunächst eine elastisch nachgiebige Unterlage und eine Reaktionskraft annehmen, die der Durchbiegung w proportional ist, so lautet die grundlegende Differentialgleichung des Problems

$$\Delta\Delta w + L^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 w + L^4 w = \frac{p}{N}, \quad (1)$$

wo $N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ (kg cm) die Biegesteifigkeit, $N L^4$ (kg/cm³) die sog. Bettungsziffer und p (kg/cm²) die auf die Flächeneinheit bezogene Druckgröße bedeuten. Als Ausgangspunkt unserer Betrachtung benutzen wir die allgemeine, nach der Navier-Fourierschen Methode von V. Lewe¹ abgeleiteten Reihen. Wenn wir — um diese Methode zu skizzieren — den Ursprung der Koordinaten in den Mittelpunkt

¹ V. Lewe: Bau-Ing. 1, 6, 31, 37 (1920); 3, 111, 314, 344 (1922); 4, 453 (1923).

eines Säulenquerschnittes und die Achsen den Gitterrichtungen parallel legen, so läßt sich die Druckfunktion im Falle der Fundamentplatte in die Form

$$p(x, y) = q f(x) g(y) \quad (2)$$

setzen, wo f und g durch die Reihenansätze

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum a_m \cos m \pi \frac{x}{a}; \quad g(y) = \frac{1}{2} b_0 + \sum b_n \cos n \pi \frac{y}{b} \quad (3)$$

dargestellt sein mögen, während im Falle der Pilzdecke die Druckfunktion die Form

$$p(x, y) = p_0 - q f(x) g(y) \quad (2a)$$

haben wird, wobei aus Gleichgewichtsgründen $p_0 a b = q a^2 \alpha \beta$ ist.

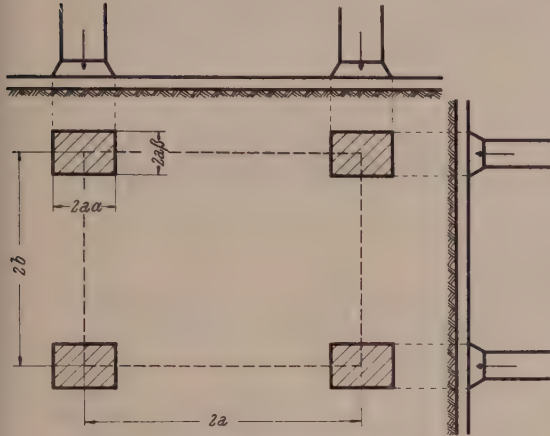


Abb. 1. Fundamentplatte.

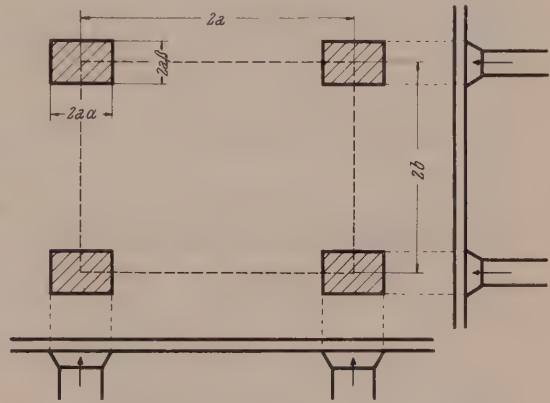


Abb. 2. Pilzdecke.

Wenn man die Koeffizienten a_0, a_m, b_0, b_n durch die bekannten Fourierschen Integrale bestimmt und dabei beachtet, daß $f(x)$ und $g(y)$ innerhalb einer Lastfläche gleich Eins zu setzen sind, außerhalb dagegen verschwinden, so erhält man die Werte

$$a_0 = 2 \alpha, \quad a_m = \frac{2}{m \pi} \sin m \pi \alpha; \quad b_0 = \frac{2 \beta}{\lambda}; \quad b_n = \frac{2}{n \pi} \sin n \pi \frac{\beta}{\lambda} \quad \left(\lambda = \frac{b}{a} \right) \quad (4)$$

und damit für $p(x, y)$ eine Summe zweier einfacher Reihen und einer Doppelreihe. Macht man einen entsprechenden Ansatz für die Durchbiegung w mit unbestimmten Koeffizienten, so lassen sich die Koeffizienten leicht durch Vergleich beider Seiten der Gleichung ermitteln. Es ergibt sich dabei schließlich mit $\frac{x}{a} = \xi; \frac{y}{b} = \frac{\eta}{\lambda}; \frac{b}{a} = \lambda$ folgende Reihe für die Durchbiegung w , wenn wir noch eine Konstante w_0 hinzufügen:

$$\begin{aligned} w = w_0 + \frac{2 q b^4}{N} & \left\{ \frac{\beta}{\lambda} \sum_u \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi}{m \pi [(\pi m \lambda)^4 + (L b)^4]} + \alpha \sum_n \frac{\sin n \pi \frac{\beta}{\lambda} \cos n \pi \frac{\eta}{\lambda}}{n \pi [(\pi n)^4 + (L b)^4]} \right. \\ & + 2 \sum_m \sum_n \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi \sin n \pi \frac{\beta}{\lambda} \cos n \pi \frac{\eta}{\lambda}}{m n \pi^2 \{[(n \pi)^2 + (m \pi \lambda)^2]^2 + (L b)^4\}} \Big\} = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = \\ & = w_0 + \frac{2 q b^4}{N} \left\{ \frac{\beta}{\lambda} F_1(\xi) + \alpha F_2(\eta) + 2 F_3(\xi \eta) \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Für die freie Pilzdecke (Abb. 2) erhalten wir dagegen mit Umkehr der Kräfte

$$w = w_0 - \frac{2 q b^4}{N} \lim_{L=0} \left\{ \frac{\beta}{\lambda} F_1(\xi) + \alpha F_2(\eta) + 2 F_3(\xi \eta) \right\}. \quad (6)$$

Unsere Aufgabe wird darin bestehen, die Reihen teilweise in geschlossene Ausdrücke bzw. die letzte Doppelreihe in eine einfache Reihe umzuformen. Zur Kontrolle der Rechnung scheint es zweckmäßig, den Fall der Pilzdecke jedenfalls in der Hauptsache durch den Grenzübergang $L \rightarrow 0$ abzuleiten, der mathematisch keine Schwierigkeiten bietet².

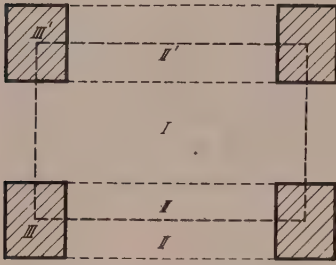


Abb. 3. Gebieteinteilung für die Berechnung der Biegefläche.

I. Die Fundamentplatte.

2. Umwandlung des Leweschens Ansatzes für das Gebiet I: ($\beta < \eta < 2\lambda - \beta$, vgl. Abb. 3). Wir betrachten zunächst die auf den Index n sich beziehende, in dem letzten Ausdruck (5) vorkommende Reihe und schreiben unter der vorstehend erwähnten Voraussetzung

$$S = \sum \frac{\sin n \pi \frac{\beta}{\lambda} \cos n \pi \frac{\eta}{\lambda}}{n \pi^6 \left[(n^2 + m^2 \lambda^2)^2 + \left(\frac{L b}{\pi} \right)^4 \right]} = \frac{1}{2} \sum \frac{\sin \frac{n \pi}{\lambda} (\eta + \beta) - \sin \frac{n \pi}{\lambda} (\eta - \beta)}{n \pi^6 \left[(n^2 + m^2 \lambda^2)^2 + \left(\frac{L b}{\pi} \right)^4 \right]}. \quad (4)$$

Den Klammerausdruck zerlegen wir in zwei Faktoren $(n^2 + \omega^2)(n^2 + \omega'^2)$, indem wir folgende, teilweise komplexe Größen einführen:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= k m \lambda, & \omega' &= k' m \lambda, & \text{wobei } k &= \sqrt{1 + i \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^2}, & k' &= \sqrt{1 - i \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^2}, \\ k &= \gamma_m + i \delta_m, & k' &= \gamma_m - i \delta_m, & k^2 k'^2 &= 1 + \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^4, \\ \gamma_m &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^4} - 1 \right)}, & \delta_m &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^4} + 1 \right)}, \\ \gamma_m^2 + \delta_m^2 &= \sqrt{1 + \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^4}; & \gamma_m^2 - \delta_m^2 &= 1; & 2 \gamma_m \delta_m &= \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die weitere Umgestaltung der Summe S geschieht mit Hilfe einiger Formeln, die aus der bei Kneser³ vorkommenden Formel

$$\sum_n \frac{\cos n (\pi - \Theta)}{n^2 + \omega^2} = -\frac{1}{2 \omega^2} + \frac{\pi \operatorname{Coj} \omega \Theta}{2 \omega \operatorname{Sin} \omega \pi} \quad (-\pi \leq \Theta \leq \pi) \quad (9)$$

sich ableiten lassen. Integrieren wir nämlich auf beiden Seiten nach der Variablen Θ von Θ bis π , so ergibt sich die weitere für uns wichtige Reihenbeziehung

$$\sum_n \frac{\sin n (\pi - \Theta)}{n (n^2 + \omega^2)} = \frac{1}{2 \omega^2} \left(\Theta - \frac{\pi \operatorname{Sin} \omega \Theta}{\operatorname{Sin} \omega \pi} \right). \quad (10)$$

² Aus der reichhaltigen Literatur geben wir nur folgende Auswahl: A. Nadai: Die elastischen Platten. Berlin. 1925. — K. Girkmann: Flächentragwerke. Wien. 1948. — S. Timoshenko: Theory of Plates and Shells. New York u. London. 1940. — S. Iguchi: Eine Lösung für die Berechnung der biegsamen rechteckigen Platten. Berlin. 1933. — F. Tölke: Über Spannungszustände in dünnen Rechteckplatten. Ingenieur-Arch. 5, 187 (1934). — K. Hayashi: Zur Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin. 1921. — F. Schleicher: Zur Theorie der Fundamente. Z. Beton u. Eisen 26, H. 23 (1927). — W. Westergaard: Ingenieuren 32, Nr. 42 (1932), Kopenhagen. — H. Aichinger-Hinterhofer: Beitrag zum Problem der elastisch gebetteten Platte unter doppelt symmetrischer Streifenlast mit Berücksichtigung von unvollkommenen Randeinspannungen. Diss. Aachen, 1950. — V. Lewe: Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten, 2. Aufl. Berlin. 1926. — K. Grein: Pilzdecken. Berlin. 1948.

³ A. Kneser: Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, S. 148. Braunschweig. 1911.

Haben wir dagegen im Nenner ein Produkt von der oben eingeführten Art $(n^2 + \omega^2) \cdot (n^2 + \omega'^2)$, so läßt sich die entsprechende Beziehung durch Partialbruchzerlegung in folgender Weise auf (9) zurückführen:

$$\sum_n \frac{\sin n (\pi - \Theta)}{n (n^2 + \omega^2) (n^2 + \omega'^2)} = \frac{1}{\omega^2 - \omega'^2} \sum_n \frac{1}{n} \sin n (\pi - \Theta) \left(\frac{1}{n^2 + \omega'^2} - \frac{1}{n^2 + \omega^2} \right). \quad (11)$$

Ersetzen wir jetzt $n (\pi - \Theta)$ durch $n \pi \frac{\eta + \beta}{\lambda}$ bzw. $\frac{n \pi}{\lambda} (\eta - \beta)$ und benutzen die unter (8) angegebenen Beziehungen, so entsteht folgende, für $\beta < \eta < 2\lambda - \beta$ verwertbare Umrechnungsformel

$$S = \frac{\pi}{4 (m \lambda)^4 (k^2 - k'^2)} \left\{ \frac{1}{k'^2} \left[1 - \frac{\eta + \beta}{\lambda} - \frac{\sin k' m \pi (\lambda - \eta - \beta)}{\sin k' m \pi \lambda} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{\eta + \beta}{\lambda} - \frac{\sin k m \pi (\lambda - \eta - \beta)}{\sin k m \pi \lambda} \right] - \frac{1}{k'^2} \left[1 - \frac{\eta - \beta}{\lambda} - \frac{\sin k' m \pi (\lambda - \eta + \beta)}{\sin k' m \pi \lambda} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{k^2} \left[1 - \frac{\eta - \beta}{\lambda} - \frac{\sin k m \pi (\lambda - \eta + \beta)}{\sin k m \pi \lambda} \right] \right\}. \quad (12)$$

Wenn wir zunächst die außerhalb der Sin-Quotienten stehenden Glieder in der geschweiften Klammer berücksichtigen, so erhalten wir

$$S_1 = - \frac{\pi}{2} \frac{\beta}{\lambda} \frac{1}{(m \lambda)^4 k^2 k'^2} = - \frac{\pi}{2} \frac{\beta}{\lambda} \frac{\pi^4}{(m \pi \lambda)^4 + (L b)^4}. \quad (13)$$

Damit entsteht aber folgende, auf diese Glieder bezogene einfache Reihe

$$- \frac{2 q b^4}{N} \frac{\beta}{\lambda} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi}{\pi m [(m \pi \lambda)^4 + (L b)^4]},$$

die entgegengesetzt gleich ist der ersten in (5) dargestellten Reihe. Da sich beide Reihen daher aufheben, so bleibt von der Doppelreihe nur der Teil übrig, der von den Sin-Quotienten herührt. Benutzen wir

$$\begin{aligned} \sin k' m \pi (\lambda - \eta - \beta) - \sin k' m \pi (\lambda - \eta + \beta) = \\ = - 2 \cos [\gamma_m - i \delta_m] m \pi (\lambda - \eta) \sin (\gamma_m - i \delta_m) m \pi \beta \end{aligned} \quad (14)$$

und die entsprechende, für $k = \gamma_m + i \delta_m$ gültige Formel, so ergibt sich nach Trennung des Reellen und Imaginären der Wert von S_2 in folgender Form:

$$S_2 = \frac{\alpha \{ [G_m(\eta) g_m(\beta) + H_m(\eta) h_m(\beta)] 2 \gamma_m \delta_m + G_m(\eta) h_m(\beta) - H_m(\eta) g_m(\beta) \}}{2 (m \lambda)^4 \left(\frac{L \alpha}{m \pi} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{L \alpha}{m \pi} \right)^4 \right] (\cos 2 \gamma_m m \pi \lambda - \cos 2 \delta_m m \pi \lambda)} \quad (15)$$

und damit nach Hinzufügung der Konstanten und der von m abhängigen Faktoren als Summe über m in der Gestalt:

$$\bar{w}_3 = \frac{2 q \alpha^2}{N L^2} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi \{ [G_m(\eta) g_m(\beta) + H_m(\eta) h_m(\beta)] 2 \gamma_m \delta_m + G_m(\eta) h_m(\beta) - H_m(\eta) g_m(\beta) \}}{(\pi m)^3 \left[1 + \left(\frac{L \alpha}{m \pi} \right)^4 \right] (\cos 2 \gamma_m m \pi \lambda - \cos 2 \delta_m m \pi \lambda)}, \quad (16)$$

wo die vorkommenden Funktionen G_m, H_m, g_m, h_m folgende Bedeutung haben:

$$\left. \begin{aligned} G_m(\eta) &= \cos [\gamma_m m \pi (2\lambda - \eta) \sin \delta_m m \pi \eta + \sin \delta_m m \pi (2\lambda - \eta) \cos \gamma_m m \pi \eta, \\ H_m(\eta) &= \sin \gamma_m m \pi (2\lambda - \eta) \cos \delta_m m \pi \eta + \cos \delta_m m \pi (2\lambda - \eta) \sin \gamma_m m \pi \eta, \\ g_m(\beta) &= \cos \gamma_m m \pi \beta \sin \delta_m m \pi \beta; \quad h_m(\beta) = \sin \gamma_m m \pi \beta \cos \delta_m m \pi \beta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wie zu erwarten ist, gehen die Funktionen G_m und H_m in sich selbst über, wenn man η durch $2\lambda - \eta$ ersetzt.

b) Die Reihe w_2 . Die noch übrig bleibende n -Reihe läßt sich aus dem Ausdruck S ableiten, wenn man $k^2 = i$, $k'^2 = -i$, also $k^2 k'^2 = 1$; $\gamma_m = \delta_m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ setzt und für die jetzt als konstant zu bewertende Größe $m \pi \lambda$ den Wert $L b$ einführt.

Dann ergibt sich

$$w_2 = \frac{q \propto}{N L^4} \left[\frac{G_b(\eta) g_b(\beta) + H_b(\eta) h_b(\beta)}{\mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} (L b) - \cos \frac{L a}{\sqrt{2}} (L b)} - \frac{\beta}{\lambda} \right], \quad (18)$$

wo folgende Abkürzungen eingeführt sind:

$$\left. \begin{aligned} G_b(\eta) &= \mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} (2 \lambda - \eta) \sin \frac{L a}{\sqrt{2}} \eta + \sin \frac{L a}{\sqrt{2}} (2 \lambda - \eta) \mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} \eta, \\ H_b(\eta) &= \mathfrak{Sin} \frac{L a}{\sqrt{2}} (2 \lambda - \eta) \cos \frac{L a}{\sqrt{2}} \eta + \cos \frac{L a}{\sqrt{2}} (2 \lambda - \eta) \mathfrak{Sin} \frac{L a}{\sqrt{2}} \eta, \\ g_b(\beta) &= \mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} \beta \sin \frac{L a}{\sqrt{2}} \beta, \quad h_b(\beta) = \mathfrak{Sin} \frac{L a}{\sqrt{2}} \beta \cos \frac{L a}{\sqrt{2}} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Für diese Funktionen gelten dieselben Bemerkungen wie für G_m und H_m ; w_2 ist eine von x unabhängige partikuläre Lösung, die einem der x -Richtung parallelen Plattenstreifen von der Breite $2 b$ entspricht, der beiderseits als eingespannt zu gelten hat und längs zweier Streifen von der Breite βa belastet ist. Die gesamte Durchbiegung läßt sich daher in der Form

$$w_I = w_0 + w_2 + \bar{w}_3$$

anschreiben, wo die Konstante w_0 so bestimmt werden kann, daß etwa im Mittelpunkt der Lastflächen $w = 0$ wird.

3. Durchbiegung im Gebiet II und II' ($|\eta| < \beta$ bzw. $|2 \lambda - \eta| < \beta$, $|\xi| > \alpha$).

a) Beschäftigen wir uns zunächst mit der Reihe w_2 , so haben wir in diesem Fall auszugehen von der Summe

$$S = \frac{1}{2} \sum \frac{\sin n \pi \frac{\eta + \beta}{\lambda} + \sin n \pi \frac{\beta - \eta}{\lambda}}{n (n^2 + \omega^2) (n^2 + \omega'^2)}, \quad (20)$$

wo jetzt $\omega^2 = i \left(\frac{L b}{\pi} \right)^2$, $\omega'^2 = -i \left(\frac{L b}{\pi} \right)^2$ zu setzen ist. Nach der Formel (10) ergibt sich dann durch eine mit der früheren ähnliche Umformung

$$S = \frac{\pi^5}{2 (L b)^4} \left\{ 1 - \frac{\beta}{\lambda} - \left[\frac{\mathfrak{Sin} \frac{L a}{\sqrt{2}} (1 + i) (\lambda - \beta) \mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} (1 + i) \eta}{\mathfrak{Sin} \frac{L b}{\sqrt{2}} (1 + i)} + \frac{\mathfrak{Sin} \frac{L a}{\sqrt{2}} (1 - i) (\lambda - \beta) \mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} (1 - i) \eta}{\mathfrak{Sin} \frac{L b}{\sqrt{2}} (1 - i)} \right] \right\}. \quad (21)$$

Nach Trennung des Reellen und Imaginären und Hinzufügung des Faktors $\frac{2 q b^4 \alpha}{N \pi^5}$ erhält man nach einer leichten Rechnung

$$w_2 = - \frac{q \propto}{N L^4} \left[\frac{P_b(\beta) p_b(\eta) + Q_b(\beta) q_b(\eta)}{\mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} (L b) - \cos \frac{L a}{\sqrt{2}} (L b)} - 1 + \frac{\beta}{\lambda} \right], \quad (22)$$

wo die Konstante aus Gründen des stetigen Überganges zwischen I und II an der

Grenze $\eta = \beta$ beibehalten wurde. Dabei haben die auftretenden Funktionen folgende Bedeutung:

$$\left. \begin{aligned} P_b(\beta) &= \mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} (2 \lambda - \beta) \cos \frac{L a}{\sqrt{2}} \beta - \cos \frac{L a}{\sqrt{2}} (2 \lambda - \beta) \mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} \beta, \\ Q_b(\beta) &= \mathfrak{Sin} \frac{L a}{\sqrt{2}} (2 \lambda - \beta) \sin \frac{L a}{\sqrt{2}} \beta - \sin \frac{L a}{\sqrt{2}} (2 \lambda - \beta) \mathfrak{Sin} \frac{L a}{\sqrt{2}} \beta, \\ p_b(\eta) &= \mathfrak{Cof} \frac{L a}{\sqrt{2}} \eta \cos \frac{L a}{\sqrt{2}} \eta, \quad q_b(\eta) = \mathfrak{Sin} \frac{L a}{\sqrt{2}} \eta \sin \frac{L a}{\sqrt{2}} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$p_b(\eta)$ und $q_b(\eta)$ sind gerade Funktionen.

b) Umformung der Doppelreihe. Benutzen wir wieder die Form (20), so erhalten wir nach dem oben angegebenen Verfahren mit Hilfe der Formel (10) bei Benutzung der unter (8) zusammengestellten Beziehungen:

$$S = \frac{\pi}{2 (m \lambda)^4 (k^2 - k'^2) k^2 k'^2} \left\{ (k^2 - k'^2) \left(1 - \frac{\beta}{\lambda} \right) + \left[\frac{k'^2 \mathfrak{Sin} k m \pi (\lambda - \beta) \mathfrak{Cof} k m \pi \eta}{\mathfrak{Sin} k m \pi \lambda} - \frac{k^2 \mathfrak{Sin} k' m \pi (\lambda - \beta) \mathfrak{Cof} k' m \pi \eta}{\mathfrak{Sin} k' m \pi \lambda} \right] \right\}. \quad (24)$$

Nach Einsetzung von $k = \gamma_m + i \delta_m$ und $k' = \gamma_m - i \delta_m$ und Entwicklung der Funktionen ergibt sich der von η abhängige Teil

$$\begin{aligned} \bar{w}_3 &= \frac{2 q a^2}{N L^2 \pi^3} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi}{m^3 \left[1 + \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^4 \right]}, \\ &\cdot \frac{P_m(\beta) q_m(\eta) - Q_m(\beta) p_m(\eta) - 2 \gamma_m \delta_m [P_m(\beta) p_m(\eta) + Q_m(\beta) q_m(\eta)]}{\mathfrak{Cof} 2 \gamma_m m \pi \lambda - \cos 2 \delta_m m \pi \lambda}, \end{aligned} \quad (25)$$

wo in leichtverständlicher Verallgemeinerung

$$\begin{aligned} P_m(\beta) &= \mathfrak{Cof} \gamma_m m \pi (2 \lambda - \beta) \cos \delta_m m \pi \beta - \cos \delta_m m \pi (2 \lambda - \beta) \mathfrak{Cof} \gamma_m m \pi \beta; \\ Q_m(\beta) &= \mathfrak{Sin} \gamma_m m \pi (2 \lambda - \beta) \sin \delta_m m \pi \beta - \sin \delta_m m \pi (2 \lambda - \beta) \mathfrak{Sin} \gamma_m m \pi \beta; \\ p_m(\eta) &= \mathfrak{Cof} \gamma_m m \pi \eta \cos \delta_m m \pi \eta; \quad q_m(\eta) = \mathfrak{Sin} \gamma_m m \pi \eta \sin \delta_m m \pi \eta \end{aligned} \quad (25)$$

zu setzen ist. Außerdem tritt bei Berücksichtigung der konstanten Glieder in S noch die Summe auf:

$$\frac{2 q b^4}{N} \left(1 - \frac{\beta}{\lambda} \right) \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi}{m \pi [(m \pi \lambda)^4 + (L b)^4]}. \quad (26)$$

Da der mit $\frac{\beta}{\lambda}$ multiplizierte Teil der ersten Reihe w_1 entgegengesetzt gleich ist, so bleibt noch folgender Summenausdruck übrig:

$$\bar{w}_1 = \frac{2 q b^4}{N} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi}{m \pi [(m \pi \lambda)^4 + (L b)^4]}, \quad (27)$$

auf den wir gleich zurückkommen werden. In dem um $2b$ abstehenden Streifen II ($|2\lambda - \eta| < \beta$) findet man die zugehörigen Ausdrücke für w_2 und \bar{w}_3 dadurch, daß man in $(w_2)_{\text{II}}$ und $(\bar{w}_3)_{\text{II}}$ die Variable η durch $2\lambda - \eta$ ersetzt.

4. Unterscheidung von II und III. Die Behandlung der Reihe (27) nach dem mehrfach angewendeten Verfahren ergibt nun zwei verschiedene Ergebnisse, je nachdem der Punkt außerhalb oder innerhalb der Lastflächen gelegen ist ($|\xi| > \alpha$ bzw. $< \alpha$). Für die Summe erhält man im ersten Fall, das heißt in II, wenn man auf

$$S = \frac{1}{2} \sum \frac{\sin m \pi (\xi + \alpha) - \sin m \pi (\xi - \alpha)}{m (m^2 + \omega^2) (m^2 + \omega'^2)}$$

mit $\omega^2 = i \left(\frac{La}{\pi} \right)^2$, $\omega'^2 = -i \left(\frac{La}{\pi} \right)^2$ die grundlegende Formel (10) anwendet,

$$S = \frac{\pi^5}{4(Lb)^4} \left\{ \frac{\mathfrak{Cof} \omega \pi (1 - \xi) \mathfrak{Sin} \omega \pi \alpha}{\mathfrak{Sin} \omega \pi} + \frac{\mathfrak{Cof} \omega' \pi (1 - \xi) \mathfrak{Sin} \omega' \pi \alpha}{\mathfrak{Sin} \omega' \pi} \right\} + \text{konst.} \quad (28)$$

und die Ausrechnung ergibt dann mit Einschluß der Konstanten

$$\bar{w}_1 = \frac{q}{N L^4} \left\{ \frac{G_a(\xi) g_a(\alpha) + H_a(\xi) h_a(\alpha)}{\mathfrak{Cof} \sqrt{2} (La) - \cos \sqrt{2} (La)} - \alpha \right\}, \quad (29)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} G_a(\xi) &= \mathfrak{Cof} \frac{La}{\sqrt{2}} (2 - \xi) \sin \frac{La}{\sqrt{2}} \xi + \sin \frac{La}{\sqrt{2}} (2 - \xi) \mathfrak{Cof} \frac{La}{\sqrt{2}} \xi, \\ H_a(\xi) &= \mathfrak{Sin} \frac{La}{\sqrt{2}} (2 - \xi) \cos \frac{La}{\sqrt{2}} \xi + \cos \frac{La}{\sqrt{2}} (2 - \xi) \mathfrak{Sin} \frac{La}{\sqrt{2}} \xi, \\ g_a(\alpha) &= \mathfrak{Cof} \frac{La}{\sqrt{2}} \alpha \sin \frac{La}{\sqrt{2}} \alpha; \quad h_a(\alpha) = \mathfrak{Sin} \frac{La}{\sqrt{2}} \alpha \cos \frac{La}{\sqrt{2}} \alpha \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

zu setzen ist. Im Gebiet III ($|\xi| < \alpha$) ergibt sich, wenn man von der Form

$$S = \frac{1}{2} \sum \frac{\sin m \pi (\xi + \alpha) + \sin m \pi (\alpha - \xi)}{m (m^2 + \omega^2) (m^2 + \omega'^2)}$$

ausgeht, nach dem üblichen Verfahren

$$\bar{w}_1 = - \frac{q}{N L^4} \left[\frac{P_a(\alpha) p_a(\xi) + Q_a(\alpha) q_a(\xi)}{\mathfrak{Cof} \sqrt{2} (La) - \cos \sqrt{2} (La)} - (1 - \alpha) \right], \quad (31)$$

während die Ausdrücke für w_2 und \bar{w}_3 dieselben bleiben wie im Gebiet II. Für die weiteren, um die Periodenlängen $2a$ und $2b$ von III abstehenden Gebiete III', III'', III''' gelten ganz ähnliche Bemerkungen wie für das Gebiet II'.

Zwischen den eingeführten Funktionen bestehen verschiedene, leicht herzuleitende Beziehungen, die zur übersichtlichen Gestaltung der Ausdrücke für w beitragen können. Insbesondere kann man alle vorkommenden Funktionen, z. B. die Verbindungen von G, H, g, h auf P und Q zurückführen. Um die drei verschiedenen Funktionsarten, z. B. G_m, G_a und G_b , zusammenzufassen, werden wir die Indizes einfach weglassen. Dann ergeben sich z. B. mit der Variablen ξ die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A(\xi, \alpha) &= G(\xi) g(\alpha) + H(\xi) h(\alpha) = \frac{1}{2} [P(\xi - \alpha) - P(\xi + \alpha)], \\ B(\alpha, \xi) &= P(\alpha) p(\xi) + Q(\alpha) q(\xi) = \frac{1}{2} [P(\alpha + \xi) + P(\alpha - \xi)] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

und die entsprechenden bei Vertauschung von ξ und α . Ebenso wird

$$\left. \begin{aligned} C(\xi, \alpha) &= G(\xi) h(\alpha) - H(\xi) g(\alpha) = \frac{1}{2} [Q(\xi - \alpha) - Q(\xi + \alpha)], \\ D(\xi, \alpha) &= P(\xi) q(\alpha) - Q(\xi) p(\alpha) = -\frac{1}{2} [Q(\xi - \alpha) + Q(\xi + \alpha)]. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

5. Zusammenfassung. Wenn wir noch der Einfachheit halber

$$Z_a = \mathfrak{Cof} \sqrt{2} (La) - \cos \sqrt{2} (La);$$

$$Z_b = \mathfrak{Cof} \sqrt{2} (Lb) - \cos \sqrt{2} (Lb);$$

$$Z_m = \mathfrak{Cof} 2 \gamma_m m \pi \lambda - \cos 2 \delta_m m \pi \lambda$$

eingeführen, so erhalten wir daher im ganzen für die Durchbiegung in den Haupt-

gebieten folgende Ausdrücke, bei denen die sich ergebenden Konstanten hinzugefügt sind, um dem stetigen Übergang an den Grenzen $\xi = \alpha$ und $\eta = \beta$ gerecht zu werden.

$$w_I = w_0 + \frac{q \alpha}{N L^4} \left[\frac{P_b(\eta - \beta) - P_b(\eta + \beta)}{2 Z_b} - \frac{\beta}{\lambda} \right] + \\ + \frac{q a^2}{N L^2} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi}{(\pi m)^3 \left[1 + \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^4 \right]} \left\{ \frac{[P_m(\eta - \beta) - P_m(\eta + \beta)] 2 \gamma_m \delta_m + Q_m(\eta - \beta) - Q_m(\eta + \beta)}{Z_m} \right\}, \quad (34a)$$

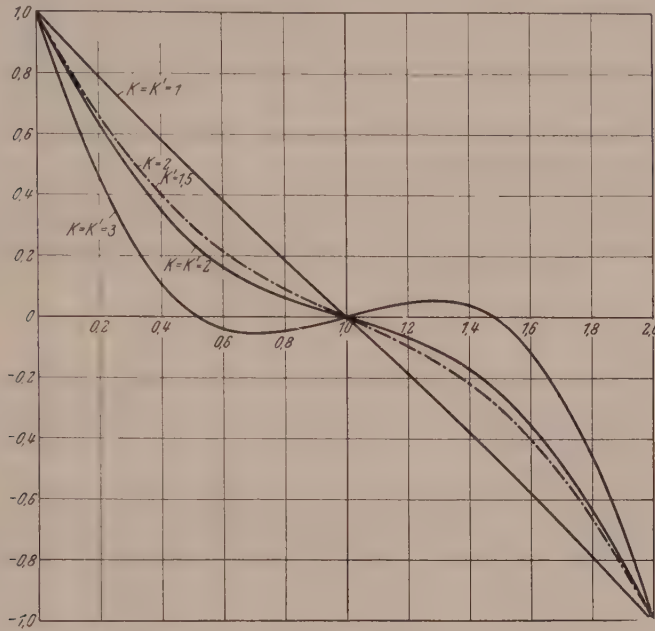


Abb. 4. Darstellung der Funktion $\frac{P(\xi)}{Z}$.

$$w_{II} = w_0 + \frac{q}{N L^4} \left[\frac{P_a(\xi - \alpha) - P_a(\xi + \alpha)}{2 Z_a} - \alpha \right] - \\ - \frac{q \alpha}{N L^4} \left[\frac{P_b(\beta + \eta) + P_b(\beta - \eta)}{2 Z_b} - \left(1 - \frac{\beta}{\lambda} \right) \right] - \frac{q a^2}{N L^2} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi}{(\pi m)^3 \left[1 + \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^4 \right]} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{Q_m(\beta + \eta) + Q_m(\beta - \eta) + 2 \gamma_m \delta_m [P_m(\beta + \eta) + P_m(\beta - \eta)]}{Z_m} \right\}, \quad (34b)$$

$$w_{III} = w_0 - \frac{q}{N L^4} \left[\frac{P_a(\alpha + \xi) + P_a(\alpha - \xi)}{2 Z_a} - 1 + \alpha \right] - \\ - \frac{q \alpha}{N L^4} \left[\frac{P_b(\beta + \eta) + P_b(\beta - \eta)}{2 Z_b} - 1 + \frac{\beta}{\lambda} \right] - \frac{q a^2}{N L^2} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi}{(\pi m)^3 \left[1 + \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^4 \right]} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{Q_m(\beta + \eta) + Q_m(\beta - \eta) + 2 \gamma_m \delta_m [P_m(\beta + \eta) + P_m(\beta - \eta)]}{Z_m} \right\}. \quad (34c)$$

Um zu zeigen, daß die w -Funktionen mit ihren ersten Ableitungen an den Übergangsstellen $\xi = \alpha$ und $\eta = \beta$ einen stetigen Verlauf haben, geben wir noch einige Formeln an, die sich aus den Gl. (32), (33) unmittelbar ergeben:

$$\left. \begin{aligned} A_a(\xi \alpha) + B_a(\alpha \xi) &= p_a(\xi - \alpha) [\mathfrak{C} \mathfrak{D} \sqrt{2(L a)} - \cos \sqrt{2(L a)}], \\ C_a(\xi \alpha) - D_a(\alpha \xi) &= -q_a(\xi - \alpha) [\mathfrak{C} \mathfrak{D} \sqrt{2(L a)} - \cos \sqrt{2(L a)}]. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Für $\xi = \alpha$ wird $p_a(0) = 1$ und $q_a(0) = 0$. Entsprechende Formeln gelten für A_b , B_b , A_m und B_m .

Für die Transformation auf die Mitte des Periodenrechteckes gelten noch folgende Formeln:

$$\left. \begin{aligned} G_a(1 + \xi) g_a(\alpha) + H_a(1 + \xi) h_a(\alpha) &= -[P_a(1 + \alpha) p_a(\xi) + Q_a(1 + \alpha) q_a(\xi)], \\ G_a(1 + \xi) h_a(\alpha) - H_a(1 + \xi) g_a(\alpha) &= -[Q_a(1 + \alpha) p_a(\xi) - P_a(1 + \alpha) q_a(\xi)]. \end{aligned} \right\} \quad (36a)$$

$$P(1 + \xi) = -P(1 - \xi); \quad Q(1 + \xi) = -Q(1 - \xi) \quad \text{usw.} \quad (36b)$$

Der Verlauf der Funktionen $\frac{P(\xi)}{Z} = \frac{\cos \kappa(2 - \xi) \cos \kappa' \xi - \cos \kappa'(2 - \xi) \cos \kappa \xi}{\cos 2\kappa - \cos 2\kappa'}$ und $\frac{Q(\xi)}{Z} = \frac{\sin \kappa(2 - \xi) \sin \kappa' \xi - \sin \kappa'(2 - \xi) \sin \kappa \xi}{\sin 2\kappa - \sin 2\kappa'}$ ist in den Abb. 4 und 5 für einige Werte von κ und κ' veranschaulicht.

Wir müssen in diesem Zusammenhang darauf verzichten, auf die weiteren Folgerungen aus unseren Ansätzen, namentlich in Beziehung auf die Ermittlung der Momente

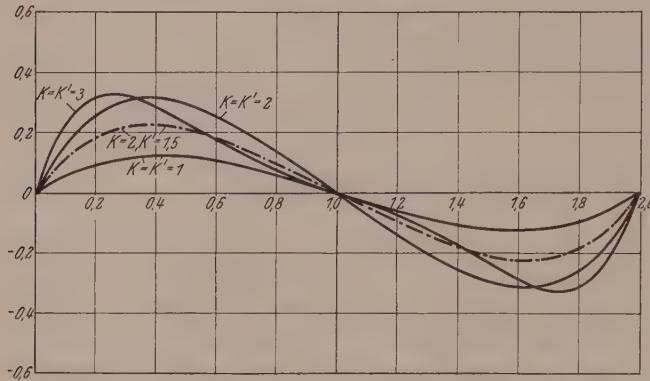


Abb. 5. Darstellung der Funktion $\frac{P(\xi)}{Z}$.

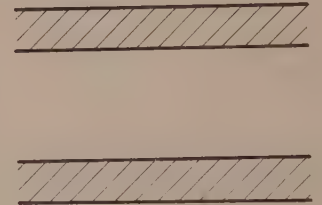


Abb. 6. Sonderfall der Streifenbelastung.

und der Spannungen, und auf die vielen Sonderfälle ausführlicher einzugehen, die sich durch geeignete Wahl der vorkommenden Konstanten aus den allgemeinen Formeln meist ohne größere Schwierigkeiten ableiten lassen, z. B. die an anderer Stelle behandelten Fälle der Belastung durch Einzelkräfte.

Nur ganz kurz sei etwa der Fall einer Belastung auf äquidistanten Streifen parallel der x -Achse hervorgehoben, der durch $\alpha = 1$ bestimmt ist (vgl. Abb. 6). Dann bleiben nur die Gebiete I außerhalb und III innerhalb der Streifen übrig. Man sieht, daß die Reihen w_3 wegen (36b) verschwinden und ebenso nach (36) das zweite Glied \bar{w}_1 in dem Ausdruck für w_{III} . Es bleibt also

$$\left. \begin{aligned} w_I &= w_0 + \frac{q}{N L^4} \left[\frac{P_b(\eta - \beta) - P_b(\eta + \beta)}{2 Z_b} - \frac{\beta}{\lambda} \right], \\ w_{III} &= w_0 - \frac{q}{N L^4} \left[\frac{P_b(\beta + \eta) + P_b(\beta - \eta)}{2 Z_b} - 1 + \frac{\beta}{\lambda} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Man weist leicht nach, daß $(w_I)_\beta = (w_3)_\beta$ ist.

Ferner soll uns noch kurz der technisch wichtige Pilzdeckenfall beschäftigen, weil der hierzu benötigte Grenzübergang auch zur Bestätigung der Rechnung größeres Interesse beanspruchen kann.

II. Der Fall der durchlaufenden Pilzdecke.

6. Durchbiegung im Gebiet I. Der Fall der Pilzdecke⁴ läßt sich aus den allgemeinen Ansätzen für die Fundamentplatte dadurch ableiten, daß man das Vorzeichen der Kräfte umkehrt und den Grenzübergang $L \rightarrow 0$ durchführt. In Anpassung an die obenstehende Darstellung wollen wir dabei die Gebiete I, II und III besonders behandeln. Im Gebiet I können wir uns auf die beiden Ausdrücke w_2 und w_3 beschränken. Der Grenzübergang ist ohne weiteres zu vollziehen, wenn man bemerkt, daß $\gamma_m = 1$ und $\delta_m = 0$ wird. a) Setzt man zunächst $\delta_m = \delta$ als klein voraus, so hebt sich in der Klammerfunktion des unter der Summe von w_3 stehenden Zählers 2δ heraus:

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow 0} \{ [G_m(\eta) g_m(\beta) + H_m(\eta) h_m(\beta)] 2\gamma_m \delta_m + G_m(\eta) h_m(\beta) - H_m(\eta) g_m(\beta) \} = \\ = 2\delta \{ \sin m\pi\beta [m\pi\lambda \operatorname{Co} m\pi\eta + m\pi\eta \sin m\pi \sin \lambda m\pi(\lambda - \eta) + \\ + 2 \sin m\pi\lambda \operatorname{Co} m\pi(\lambda - \eta)] - m\pi\beta \operatorname{Co} m\pi\beta \sin m\pi\lambda \operatorname{Co} m\pi(\lambda - \eta) \} \end{aligned} \quad (38)$$

und wir erhalten daher wegen $2\gamma_m \delta_m = 2\delta_m = \left(\frac{La}{m\pi}\right)^2$ die Biegungsfunktion

$$w_3 = -\frac{q a^4}{N \pi^5} \sum_m \frac{\sin m\pi\alpha \cos m\pi\xi U_m(\eta)}{m^5 \sin^2 m\pi\lambda}, \quad (39)$$

wobei

$$\begin{aligned} U_m(\eta) = \sin m\pi\beta [m\pi\lambda \operatorname{Co} m\pi\eta + m\pi\eta \sin m\pi\lambda \sin m\pi(\lambda - \eta) + \\ + 2 \sin m\pi\lambda \operatorname{Co} m\pi(\lambda - \eta)] - m\pi\beta \operatorname{Co} m\pi\beta \sin m\pi\lambda \operatorname{Co} m\pi(\lambda - \eta) \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Um w_2 zu berechnen, kann man zwei Wege einschlagen, entweder den Grenzübergang $L \rightarrow 0$ an dem Ausdruck (18) vornehmen oder auf die ursprüngliche zweite Lewesche Reihe mit $L = 0$ zurückgehen.

Die Bestimmung des Grenzüberganges an dem bereits summierten Ausdruck (18) ist etwas umständlich, weil man die drei ersten Glieder der Reihenentwicklungen der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, das heißt Glieder bis zur vierten und fünften Potenz des Argumentes berücksichtigen muß. Einfacher ist es, bei der Summierung der ursprünglichen Reihe die Fouriersche Entwicklung

$$\sum \frac{1}{(n\pi)^5} \sin n\pi \frac{z}{b} = \frac{1}{720} \left[8 \frac{z}{b} - 20 \left(\frac{z}{b} \right)^3 + 15 \left(\frac{z}{b} \right)^4 - 3 \left(\frac{z}{b} \right)^5 \right] \quad (40)$$

zu benutzen, aus der sich dann sofort der Wert für die Summe

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{(n\pi)^5} \left[\sin n\pi \frac{\eta + \beta}{\lambda} - \sin n\pi \frac{\eta - \beta}{\lambda} \right]$$

und daher die entsprechende Durchbiegung zu

$$w_2 = \frac{q \alpha \frac{\beta}{\lambda} b^4}{24 N} \left\{ \left[2 \frac{\eta}{\lambda} - \left(\frac{\eta}{\lambda} \right)^2 \right]^2 - 2 \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 \left[2 \frac{\eta}{\lambda} - \left(\frac{\eta}{\lambda} \right)^2 \right] + \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^3 \right\} \quad (41)$$

berechnen läßt. Zu demselben Ausdruck gelangt man nun aber auch, wenn man nach der in der elementaren Balkentheorie üblichen Methode die Durchbiegung eines ebenen Balkens oder eines Plattenstreifens von der Breite $2b$ bestimmt, der gleich-

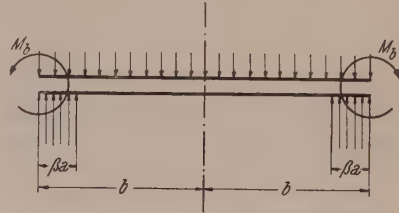


Abb. 7. Eingespannter und belasteter Plattenstreifen als Teillösung.

⁴ V. Lewe: Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten, 2. Aufl. Berlin. 1926. — K. Grein: Pilzdecken, Theorie und Berechnung. Berlin. 1948. — S. Woinowsky-Krieger-Berlin: Beitrag zur Theorie der Pilzdecken. Z. f. angew. Math. u. Mech. 14 (1934), 13—18.

mäßig belastet, an den Enden eingespannt und längs zweier Streifen von der Breite a β gestützt ist. Wenn man das Einspannmoment

$$M_b = \frac{1}{24} q b^2 \left[8 \frac{\beta}{\lambda} - 12 \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 + 4 \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^3 \right] \quad (42)$$

berücksichtigt, so erhält man in der Tat für einen Punkt außerhalb der Stützflächen wieder den oben ermittelten Ausdruck. Dabei ist als Stützkraft die Größe αq zu verwenden. Man kann aber auch die gesamte Stützkraft P einführen, die mit q durch die Beziehung $q \cdot 4 a b \alpha \frac{\beta}{\lambda} = P$ zusammenhängt.

7. Durchbiegung in den Gebieten II und III. a) Wenn $L = 0$ ist, so geht der von η abhängige Zähler unter der Summe w_3 wegen $\gamma_m = 1$ bei kleinem δ_m , wie man leicht nachrechnet, über in

$$2 \delta_m \{ m \pi \eta \operatorname{Sin} m \pi \eta \operatorname{Sin} m \pi \lambda \operatorname{Sin} m \pi (\lambda - \beta) - m \pi \beta \operatorname{Sin} m \pi \lambda \operatorname{Cos} m \pi \eta \operatorname{Cos} m \pi (\lambda - \beta) + \\ + m \pi \lambda \operatorname{Cos} m \pi \eta \operatorname{Sin} m \pi \beta - 2 \operatorname{Cos} m \pi \eta \operatorname{Sin} m \pi \lambda \operatorname{Sin} m \pi (\lambda - \beta) \} = 2 \delta_m V_m(\eta). \quad (43)$$

Wir erhalten daher bei Benutzung von $2 \delta_m = \left(\frac{L a}{m \pi} \right)^2$ in dem Gebiet II folgenden Ausdruck für w_3 :

$$w_3 = - \frac{q a^4}{N \pi^5} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi \cdot V_m(\eta)}{m^5 \operatorname{Sin}^2 m \pi \lambda}, \quad (44)$$

wo

$$V_m(\eta) = m \pi \eta \operatorname{Sin} m \pi \eta \operatorname{Sin} m \pi \lambda \operatorname{Sin} m \pi (\lambda - \beta) - \\ - m \pi \beta \operatorname{Sin} m \pi \lambda \operatorname{Cos} m \pi \eta \operatorname{Cos} m \pi (\lambda - \beta) + \\ + m \pi \lambda \operatorname{Cos} m \pi \eta \operatorname{Sin} m \pi \beta - 2 \operatorname{Cos} m \pi \eta \operatorname{Sin} m \pi \lambda \operatorname{Sin} m \pi (\lambda - \beta) \quad (45)$$

zu setzen ist. In Übereinstimmung mit den Entwicklungen in I unterscheiden sich die beiden Funktionen U_m und V_m für $\eta = \beta$ um eine Konstante. Wir haben

$$U_m(\beta) - V_m(\beta) = 2 \operatorname{Sin}^2 m \pi \lambda, \quad (46)$$

so daß also

$$(w_3(\beta))_{\text{I}} - (w_3(\beta))_{\text{II}} = \bar{w}_1$$

wird. Dagegen stimmen die Ableitungen an der Grenze überein:

$$\left(\frac{dU_m(\eta)}{d\eta} \right)_{\eta=\beta} = \left(\frac{dV_m(\eta)}{d\eta} \right)_{\eta=\beta}. \quad (47)$$

Es bleibt also jedenfalls noch der Grenzwert des Ausdruckes \bar{w}_1 übrig, der einem Plattenstreifen von der Breite $2a$ parallel der y -Achse entspricht, der, gleichmäßig belastet, an den Enden eingespannt und längs zweier Endstreifen von der Breite a α gestützt ist. Die zugehörige Durchbiegung ist ganz analog zur Biegung des im Gebiet I auftretenden Streifens parallel der x -Richtung zu behandeln. Aus der Balkentheorie ergibt sich das Einspannmoment

$$M_a = \frac{1}{24} q a^2 (8 \alpha - 12 \alpha^2 + 4 \alpha^3) \quad (48)$$

und damit die Durchbiegung

$$(w_1)_{\text{II}} = \frac{q \alpha a^4}{24 N} \{ (2 \xi - \xi^2)^2 - 2 \alpha^2 (2 \xi - \xi^2) + \alpha^3 \}. \quad (49)$$

Dazu kommt ferner die Durchbiegung w_2 , herrührend von dem Plattenstreifen parallel der x -Richtung, für die Punkte im Inneren der Stützstreifen. Um die Durchbiegung zu erhalten, kann man entweder auf die Summe

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{(n \pi)^5} \left[\sin n \pi \frac{\eta + \beta}{\lambda} + \sin n \pi \frac{\beta - \eta}{\lambda} \right]$$

die Formel (40) anwenden oder die Methode der elementaren Balkentheorie heranziehen. In beiden Fällen erhält man

$$(w_2)_{II} = \frac{q b^4 \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right)}{24 N} \left\{ 2 \left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \left(2 - \frac{\beta}{\lambda}\right) \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^4 \right\}. \quad (50)$$

Im Gebiet III bleiben die Ausdrücke w_2 und w_3 erhalten wie in II, während für Punkte im Inneren der Stützfläche der Ausdruck

$$(\bar{w}_1)_{III} = \frac{q \alpha^4}{24 N} (1 - \alpha) [2 \xi^2 \alpha (2 - \alpha) - \xi^4] \quad (51)$$

zu benutzen ist.

Zusammenfassend haben wir also in den drei Hauptgebieten folgende Ausdrücke für die Biegefläche der Pilzdecke:

$$\left. \begin{aligned} w_I &= w_0 + \frac{q \alpha \frac{\beta}{\lambda} b^4}{24 N} \left\{ \left[2 \frac{\eta}{\lambda} - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 \right]^2 - 2 \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 \left[2 \frac{\eta}{\lambda} - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 \right] + \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^3 \right\} - \\ &\quad - \frac{q \alpha^4}{N \pi^5} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi U_m(\eta)}{m^5 \sin^2 m \pi \lambda} = w_0 + (w_2)_I + (\bar{w}_3)_I, \\ w_{II} &= w_0 + \frac{q \alpha \alpha^4}{24 N} \{ (2 \xi - \xi^2)^2 - 2 \alpha^2 (2 \xi - \xi^2) + \alpha^3 \} + \\ &\quad + \frac{q \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right) b^4}{24 N} \left\{ 2 \frac{\beta}{\lambda} \left(2 - \frac{\beta}{\lambda}\right) \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^4 \right\} - \\ &\quad - \frac{q \alpha^4}{N \pi^5} \sum_m \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi V_m(\eta)}{m^5 \sin^2 m \pi \lambda} = w_0 + (\bar{w}_1)_{II} + (w_2)_{II} + (\bar{w}_3)_{II}, \\ w_{III} &= w_0 + \frac{q \alpha^4 (1 - \alpha)}{24 N} [2 \alpha \xi^2 (2 - \alpha) - \xi^4] + (w_2)_{II} + (\bar{w}_3)_{II} = \\ &\quad = w_0 + (\bar{w}_1)_{II} + (w_2)_{III} + (\bar{w}_3)_{III}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Gelegentlich wird es zweckmäßig, den Ursprung der Koordinaten in den Mittelpunkt des Periodenrechteckes zu verlegen. Setzt man zu diesem Zweck $\xi + 1$ und $\eta + \lambda$ an Stelle von ξ und η , so kommt z. B.

$$U_m(\lambda + \eta) = \sin m \pi \lambda \sin m \pi \beta \{ \cos m \pi \eta (2 + m \pi \lambda \operatorname{ctg} m \pi \lambda - m \pi \beta \operatorname{ctg} m \pi \beta) - m \pi \eta \sin m \pi \eta \}, \quad (53)$$

$$V_m(\lambda + \eta) = \sin m \pi \lambda \sin m \pi (\lambda - \beta) \{ m \pi (\lambda + \eta) \sin m \pi (\lambda + \eta) - \cos m \pi (\lambda + \eta) [2 + m \pi \lambda \operatorname{ctg} m \pi \lambda - m \pi (\lambda - \beta) \operatorname{ctg} m \pi (\lambda - \beta)] \}.$$

Damit erhalten wir z. B. für die Durchbiegung einer Pilzdecke in I und II:

$$\left. \begin{aligned} w_I &= w_0 + \frac{q \alpha \frac{\beta}{\lambda} b^4}{24 N} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 \right]^2 - 2 \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^2 \right] + \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^3 \right\} + \\ &\quad + \frac{q \alpha^4}{N \pi^5} \sum (-1)^{m+1} \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi \sin m \pi \beta}{m^5 \sin m \pi \lambda} [\cos m \pi \eta (2 + \\ &\quad + m \pi \lambda \operatorname{ctg} m \pi \lambda - m \pi \beta \operatorname{ctg} m \pi \beta) - m \pi \eta \sin m \pi \eta], \\ w_{II} &= w_0 + \frac{q \alpha \alpha^4}{24 N} \{ (1 - \xi^2)^2 - 2 \alpha^2 (1 - \xi^2) + \alpha^3 \} + \\ &\quad + \frac{q \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\lambda}\right) b^4}{24 N} \left(1 + \frac{\eta}{\lambda} \right)^2 \left[2 \frac{\beta}{\lambda} \left(2 - \frac{\beta}{\lambda}\right) - \left(1 + \frac{\eta}{\lambda} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \frac{q \alpha^4}{N \pi^5} \sum (-1)^{m+1} \frac{\sin m \pi \alpha \cos m \pi \xi \sin m \pi (\lambda - \beta)}{m^5 \sin m \pi \lambda} \{ m \pi (\lambda + \\ &\quad + \eta) \sin m \pi (\lambda + \eta) - \cos m \pi (\lambda + \eta) [2 + m \pi \lambda \operatorname{ctg} m \pi \lambda - \\ &\quad - m \pi (\lambda - \beta) \operatorname{ctg} m \pi (\lambda - \beta)] \}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

8. Der Fall der Punktstützen.⁵ Einige Bemerkungen verdient noch der Fall, daß $\alpha = \beta = 0$ wird oder die rechteckigen Stützflächen sich auf einen Punkt zusammenziehen. Wir wollen zunächst die ursprüngliche Lage des Anfangspunktes voraussetzen und vorläufig nur $\beta = 0$ setzen, um zu zeigen, daß erwartungsgemäß der verschwindende Streifen II keinen Beitrag zur Biegefläche liefert. Die Funktion V_m geht mit $\beta = 0$ über in

$$\lim_{\beta=0} V_m = m\pi\eta \operatorname{Sin} m\pi\eta - 2\operatorname{Cos} m\pi\eta. \quad (55)$$

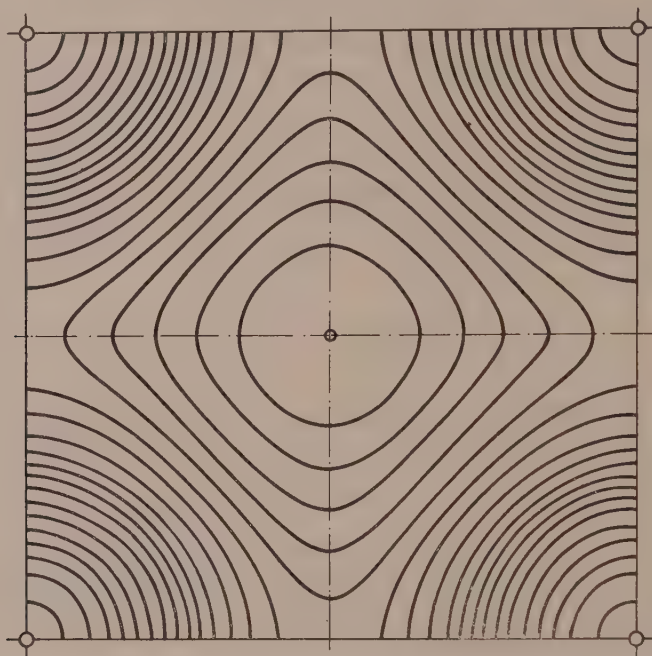


Abb. 8. Höenschichtlinien für die Biegefläche einer quadratischen Pilzdecke.

Da in II $\eta = 0$ wird, so reduziert sich die Funktion V_m auf die Konstante -2 und daher bleiben folgende Teile der Biegungsfunktion w , wenn wir jetzt α nur in der ersten Potenz berücksichtigen und $\sin m\pi\alpha = m\pi\alpha$ setzen:

$$w_{II} = -\frac{q\alpha}{24N} \left(\frac{\eta}{\lambda}\right)^4 + \frac{2q\alpha a^4}{N} \sum \frac{\cos m\pi\xi}{(\pi m)^4} + \frac{q\alpha a^4}{24N} (2\xi - \xi^2)^2. \quad (56)$$

Nun ist aber

$$\sum \frac{\cos m\pi\xi}{(\pi m)^4} = \frac{1}{48} [-4\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4 + \text{konst.}]. \quad (57)$$

Man sieht dann ohne weiteres, daß die variablen Glieder mit ξ sich herausheben, und da außerdem $\eta = 0$ gesetzt werden kann, bleiben in der Tat keine weiteren veränderlichen Glieder für das Gebiet II übrig. Benutzen wir nun die Darstellung für w_I der Pilzdecke mit dem Mittelpunkt des Periodenrechteckes als Bezugspunkt, so geht die Gleichung der Biegefläche mit $4qab\alpha\frac{\beta}{\lambda} = P$ über in

$$w = w_0 + \frac{Pb^4}{96} \left[1 - \left(\frac{\eta}{\lambda} \right)^2 \right]^2 + \frac{Pa^3}{4N\pi^3} \sum_m \frac{(-1)^{m+1} \cos m\pi\xi}{m^3 \operatorname{Sin} m\pi\lambda} \{ \operatorname{Cos} m\pi\eta (1 + \operatorname{Tg} m\pi\lambda) - m\pi\eta \operatorname{Sin} m\pi\eta \}. \quad (58)$$

⁵ Vgl. W. Müller, Ing.-Archiv 20 (1952), 273 ff.

Um auch durch die Anschauung eine gewisse Bestätigung der Rechnung zu geben, haben wir die Höhenschichtlinien der Biegefläche für den Fall $\lambda = 1$ aufgezeichnet. Man sieht dabei, daß die Linien in einem gewissen Abstand von den Pilzstützen, der etwa den Wendebereichen der Fläche entsprechen, die größte Dichte aufweisen und daß sie um so kreisartiger werden, je mehr sie sich den Stützen nähern.

Die weiteren Folgerungen aus den vorliegenden Ansätzen bleiben einer späteren Untersuchung vorbehalten.

(Eingegangen am 7. Mai 1952.)

Hydrodynamische Theorie fester Stoffe*.

Von C. Torre, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Der firmo-viskose Stoff von Jeffreys setzt die Gesamtspannung aus einem elastischen und einem viskosen Teil zusammen. Wir untersuchen hier nur den Einfluß des zweiten Teiles, d. h. den Einfluß der Formänderungsgeschwindigkeiten auf die Beanspruchung eines festen Stoffes. Diese hydrodynamische Theorie fester Stoffe wird auf die Untersuchung der Beanspruchungen unterirdischer Ingenieurbauten angewendet.

Summary. The firmo-viscous substance of Jeffreys composes the total tension of an elastic and of a viscous part. In this case only the influence of the second part is examined, i. e. the influence of the deformation speed on the stresses to which a solid body is subjected. This hydrodynamical theory of solid substances is applied to the investigation of the stresses operating on subterraneous (underground) structures.

Résumé. La substance firmo-visqueuse de Jeffreys compose la tension totale d'une partie élastique et d'une partie visqueuse. Nous étudions ici seulement l'influence de la seconde partie, à savoir l'influence de la rapidité de la déformation sur l'effort subi par le corps solide. Cette théorie hydrodynamique des corps solides est appliquée à l'examen des efforts que subissent les constructions en sous-sol.

1. Einleitung.

Wir werden nachfolgend über das Gebiet berichten, das Stoffe untersucht, die zwischen elastischen und grenzbeanspruchten liegen und mit Begriffen wie „zähe feste“, „elastisch-zähe“ (nach Maxwell) und „firmo-viskose“ Stoffe (nach Jeffreys) beschrieben werden.

A. Nadai¹ (S. 422ff.) gibt in einer Zusammenstellung unter anderem die Spannungs-Geschwindigkeits-Beziehungen „zäher fester“ Stoffe an, mit der Bemerkung, daß bei sehr kleinen Formänderungsgeschwindigkeiten die Trägheitskräfte vernachlässigt und nur die Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigt werden. Diese Bemerkung ist — wie nachfolgend gezeigt wird — in bezug auf die Formänderungen im Bauwesen und Maschinenbau berechtigt. Bei einem geologischen Körper (also in Tektonik bzw. Geodynamik) werden wir hingegen in den Stokes-Navierschen Gleichungen fallweise auch die Trägheitskräfte berücksichtigen. Dafür spricht ein Sonderfall, nämlich der der langsamen, stationären Strömung um einen Kreiszylinder (s. etwa W. Müller², S. 120 und 127), bei dem man nach Lamb-Oseen auch die Trägheitsglieder berücksichtigen muß. Weiterhin entscheidet auch die Form der hydrodynamischen Gl. (2), daß man diese auch bei „zähen festen“ Stoffen anwenden kann: Es ist nämlich für die Größe einer Spannung gleichgültig, ob man mit großen Geschwindigkeiten und mit kleinen Zähigkeitskoeffizienten arbeitet oder umgekehrt. Wie man übrigens die Zähigkeitsglieder in der Stokes-Navierschen Differentialgleichung bei großen

* Vorgetragen am 7. Juni 1952 auf der Tagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Braunschweig.

¹ A. Nadai: Österr. Ingenieur-Arch. 3, 261, 421 (1949); 5, 182 (1951).

² W. Müller: Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten. Leipzig. 1932.

Reynoldsschen Zahlen nicht gleich streichen darf, ebenso wenig darf man bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen die Trägheitsglieder gleich in der Stokes-Navierschen Gleichung streichen.

Die Geodynamiker sind wahrscheinlich die ersten gewesen (s. Darwin³ und etwa Prey⁴, Gutenberg⁵), die feste Stoffe mit Hilfe der hydrodynamischen Gleichungen untersucht haben. Sie haben sich meistens mit eigenen Methoden begnügt und dabei die neueren Arbeiten auf dem Gebiete der Hydrodynamik weniger berücksichtigt. Prey⁴ übernimmt von Darwin³ die Meinung, daß mit der hydrodynamischen Behandlung fester Stoffe auch das Plastizitätsproblem dieser gelöst wird. Gutenberg⁵ (S. 530) hat nachher bemerkt, daß hier die Grenzbedingung fester Stoffe berücksichtigt werden muß.

Bei der Berechnung des Gebirgsdruckes in Fels unterscheiden wir zunächst die Grenzbeanspruchung eines geologischen Körpers, der in jedem Punkt seiner Ausdehnung an der Fließ- bzw. Bruchgrenze beansprucht ist. Man kann nach dieser Methode z. B. die Faltung der Gebirge untersuchen (s. Bijlaard⁶). Wir werden diesen Fall hier nicht weiter behandeln. — Der zweite Fall, der uns hier interessiert, besteht aus der Berechnung des derzeit herrschenden Gebirgsdruckes in einem schon beruhigten Gebirge. Diese Aufgabe ist für die in der letzten Zeit rege gewordene unterirdische Bautätigkeit sehr wichtig. Um diese Aufgabe umfassender zu lösen, werden wir geologische Erscheinungen nach den werkstoffmechanischen Gesichtspunkten gruppieren, und auf diese Weise werden sie einer entsprechenden mathematischen Untersuchung unterzogen. Die Beispiele dafür sind klüftige Gesteine, zermahlene Gesteine, Schiefer, kohäsionslose und bindige Böden und anderes. Bei den klüftigen Gesteinen haben wir die Grenzbeanspruchung aus dem Kluftwinkel berechnet⁷. Um nun für diesen Fall den derzeit herrschenden Gebirgsdruck zu ermitteln, haben wir vorausgesetzt, daß diese Spannungen von sehr fern wirkenden Kräften erzeugt werden. Aus den Formänderungen haben wir dann die — für die hydrodynamischen Berechnungen eines umströmten Körpers notwendige — unendlich ferne Geschwindigkeit V_∞ ermittelt. So wurde — mit Hilfe der Hypothese der unendlich fern wirkenden Grenzbeanspruchung — ein Übergang zwischen dem in jedem Punkt grenzbeanspruchten geologischen Körper und den derzeit wirkenden Kräften im Gebirge erreicht. Die Berechnung einer Tunnelmauer nach der Grenzbeanspruchung im Gestein wäre sehr unzweckmäßig und würde den bisherigen technischen Erfahrungen widersprechen. So wird hier eine Hydrodynamik fester Stoffe — wie im Titel angedeutet — untersucht und nicht, wie üblich, die Grenzbeanspruchung eines plastischen Körpers mit Berücksichtigung von Formänderungsgeschwindigkeiten. Die einseitige Druckwirkung — wie bei der Strömung einer Flüssigkeit — wurde bei den unterirdischen Bauten oft beobachtet, wie z. B. aus den Formänderungen der Stollenwände, aus dem Bruch des Holzgerüstes, Abplattungen und Mauerbeanspruchung, und dann insbesondere aus der Schuttlage und -menge bei Sprengungen.

Das Problem des Fließens grenzbeanspruchter fester Stoffe hat schon Saint-Venant⁸ für den ebenen Fall mathematisch formuliert. Zusammenfassende Darstellungen der Veröffentlichungen aus dem Gebiet der bleibenden Formänderungen

³ G. H. Darwin: Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 170 (1879); Sci. Pap. 2.

⁴ A. Prey: S.-B. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa 151, H. 9 und 10, 293.

⁵ B. Gutenberg: Der physikalische Ausbau der Erde. Handbuch der Geophysik, Bd. II, S. 440. 1933.

⁶ P. P. Bijlaard: Mitt. aus dem Institut der Baustatik in Zürich, Nr. 21.

⁷ C. Torre: Geologie u. Bauwesen 18, 83 (1951).

⁸ B. de St. Venant: C. R. hebdom. Séances Sci. 70, 72, 74; J. de math. 1871, 473.

findet man bei Nadai^{9, 10, 11} und Prager¹². Die mathematische Formulierung des räumlichen Problems stammt unter anderem auch von Mises¹³ her, dessen Spannungs-Geschwindigkeits-Beziehungen denen in der Hydrodynamik inkompressibler Stoffe ähnlich sind mit dem Unterschied, daß Mises einen veränderlichen Zähigkeitskoeffizient verlangt, der aus der Grenzbedingung ermittelt wird. Etwas mehr Klarheit bei der Ermittlung solcher veränderlicher Zähigkeitskoeffizienten bzw. Plastizitätsmodulen hat Nadai¹ (S. 283ff.) gebracht. Eine bemerkenswerte Idee für die Berechnung von Formänderungsgeschwindigkeiten im ebenen Fall mit der Grenzbedingung für einen ideal-plastischen Stoff hat Hilda Geiringer^{12, 14} mitgeteilt.

Ein Hinweis auf die Anwendung der Navier-Stokesschen Differentialgleichung und hydrodynamischen Spannungsgleichungen von Stokes auf feste Stoffe mit Rücksicht auf die Berechnung der unterirdischen Ingenieurbauten sowie einige Gegenüberstellungen unserer Ableitungen zu den geodynamischen Ergebnissen ist das eigentliche Ziel dieses Beitrages. Die im geologischen Körper immer mehr oder weniger stark wirkende statische Beanspruchung wird hier außer Acht gelassen.

2. Abschätzung der Spannungen.

Zunächst wollen wir zeigen, wie groß der Größenordnung nach die Formänderungsgeschwindigkeiten, der Zähigkeitskoeffizient und die Spannungen eines strömenden, zähen festen Stoffes etwa bei der Zimmertemperatur sind, und zwar in folgenden drei Fällen:

1. Die Formänderungsgeschwindigkeit eines in der Druckzone auf der Grenze der zulässigen Spannung $\sigma_{zul} = 100 \text{ kg/cm}^2$ auf reine Biegung beanspruchten Stahlbetonbalkens mit $E = 3 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$ und mit einer Stützweite von $3 \cdot 10^2 \text{ cm}$ wird unter der Annahme berechnet, daß sich der Balken, der streng statisch beansprucht sein möge, erst nach einem Jahr ($= 3 \cdot 16 \cdot 10^7 \text{ sek}$) endgültig verformt. Die Geschwindigkeit beträgt dann (näherungsweise $v_x = u/T = l \sigma_x / E T$; mit $l = 3 \cdot 10^2 \text{ cm}$, $\sigma_x = 10^2 \text{ kg/cm}^2$, $E = 3 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $T = 1 \text{ J} = 3 \cdot 16 \cdot 10^7 \text{ sek}$ folgt $v_x = 10^{-8} / 3 \cdot 16 \sim 10^{-9} \text{ cm/sek}$)

$$v_x \sim 10^{-9} \text{ cm/sek.}$$

2. Die Formänderungsgeschwindigkeit eines stark plastisch verformten Gebirges beträgt nach Prey⁴ (10^5 cm verformt sich in der Zeit von 10^4 Jahren)

$$v_x \sim 10^{-7} \text{ cm/sek.}$$

3. Beim Bruch eines auf einachsigen Druck beanspruchten Gesteinsprismas mit $10/_{00}$ Verkürzung auf 10 cm Meßlänge und 45 Min. Belastungsdauer beträgt

$$v_x \sim 10^{-6} \text{ cm/sek.}$$

Weiterhin nehmen wir an, daß die Spannungen einer strömenden Flüssigkeit in folgender Form gegeben sind:

$$\sigma_x = \frac{v_x \mu}{a} \cdot F_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad \bar{x} = x/x_0, \dots \text{ usw.} \quad (1)$$

⁹ A. Nadai: Der bildsame Zustand der Werkstoffe. Springer-Verlag. 1927.

¹⁰ A. Nadai: Plastizität und Erddruck. Handbuch der Physik, Bd. VI, S. 428. Springer-Verlag. 1928.

¹¹ A. Nadai: Theory of Flow and Fracture of Solids. New York. 1950.

¹² H. Geiringer und W. Prager: Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand. *Ergebn. exakt. Naturwiss.* **13**, 310 (1933).

¹³ R. v. Mises: *Göttinger Nachr.* **1913**, 589.

¹⁴ H. Geiringer: *Fondaments mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes.* L'académie des sciences de Paris, F. LXXXVI, 1937.

„usw.“ bedeutet, daß analoge Größen in der y - und z -Richtung zu nehmen sind. $F_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ist eine Funktion von bezogenen Koordinaten, v_x ist die Geschwindigkeit in der x -Richtung, μ der Zähigkeitskoeffizient und a eine Körperabmessung quer zur Strömung. Größenordnung sei

$$a \sim 10^2 \text{ cm}, \quad \mu \sim 10^{11} \text{ kgsek/cm}^2.$$

Bezeichnen wir noch die bezogene Spannung mit

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x / F_x = v_x \mu / a, \quad (2)$$

dann ergibt sich nach Gl. (2) und den oben angegebenen Größen die Spannung eines strömenden festen Stoffes:

1. In der Druckzone eines Stahlbetonbalkens

$$\bar{\sigma}_x \sim 10^{-9} \cdot 10^{11} / 10^2 = 1 \text{ kg/cm}^2.$$

2. Bei einem stark fließenden Gebirge

$$\bar{\sigma}_x \sim 10^{-7} \cdot 10^{11} / 10^2 = 10^2 \text{ kg/cm}^2.$$

3. Und schließlich beim Bruch eines auf einachsigen Druck beanspruchten Gesteinsprismas

$$\bar{\sigma}_x \sim 10^{-6} \cdot 10^{11} / 10^2 = 10^3 \text{ kg/cm}^2.$$

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich: 1. Die Spannung infolge der Strömung in der Druckzone eines Stahlbetonbalkens beträgt nur 1% der Betriebsspannung von 100 kg/cm². In Übereinstimmung mit Nadai¹ kann man den hydrodynamischen Anteil der Spannung gegenüber dem statischen Anteil vernachlässigen. Diese Addition der Spannungen hat uns von „zähen festen“ Stoffen zu „firmo-viskosen“ nach Jeffreys (siehe Nadai¹, S. 427) geführt. Eine diesbezügliche Ergänzung ist, wegen des additiven Charakters der Gleichungen, stets möglich. Nach Jeffreys sollte die „Relaxationszeit“ eines firmo-viskosen Stoffes sehr kurz sein, während wir die Möglichkeit einer beliebig großen „Relaxationszeit“ auch bei diesen Stoffen voraussetzen wollen. — 2. Der zweite Fall ergibt eine Beanspruchung, bei der — wegen der sehr langen Belastungsdauer — starke bleibende Formänderungen auftreten. Die Berechnung zeigt, daß die Bruchgrenze zwar noch nicht erreicht wurde, die berechnete Beanspruchung ist jedoch befähigt, über eine sehr lange Zeit beträchtliche bleibende Formänderungen zu verursachen. — 3. Im dritten Fall liegt die Beanspruchung (in Übereinstimmung mit der gestellten Aufgabe) ungefähr an der Bruchgrenze eines auf einachsigen Druck beanspruchten Gesteinsprismas. Hier überwiegt die Beanspruchung infolge Strömung.

Mit dem spezifischen Gewicht $\gamma = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ und mit der Erdbeschleunigung $g = 0.981 \cdot 10^3 \text{ cm/sek}^2$ lautet die Dichte (für den Fall der Kaverne Braz, s. nachfolgend):

$$\varrho = \gamma / g = 2.7 \cdot 10^{-3} / 0.981 \cdot 10^3 = 2.75 \cdot 10^{-6} \text{ kgsek}^2/\text{cm}^4,$$

also $\varrho \sim 10^{-6} \text{ kgsek}^2/\text{cm}^4$. Nehmen wir die kinematische Zähigkeit mit

$$\nu = \mu / \varrho \sim 10^{11} / 10^{-6} = 10^{17} \text{ cm}^2/\text{sek},$$

dann lautet die Reynoldssche Zahl der Größenordnung nach (s. etwa Prandtl¹⁵, S. 102) mit $a \sim 10^2 \text{ cm}$, $v \sim 10^{-7} \text{ cm/sek}$:

$$Re = v a / \nu \sim 10^{-7} \cdot 10^2 / 10^{17} = 10^{-22},$$

und hiermit die bezogene Grenzschichtdicke

$$\delta / l \sim 1 / \sqrt{Re} \sim 10^{11}; \quad l \sim 1 \text{ cm}, \quad \delta \sim 10^{11} \text{ cm} = 10^6 \text{ km}.$$

¹⁵ L. Prandtl: Führer durch die Strömungslehre, 3. Aufl. Vieweg u. Sohn. 1949.

Dieses Ergebnis zeigt, wie erwartet, daß das ganze Strömungsgebiet von der Grenzschicht gestört wird und daß man in keinem Teil dieses Gebietes mit der Potentialströmung rechnen kann.

3. Anwendung der hydrodynamischen Gleichungen.

In der ingenieurgeologischen Praxis haben wir, wie oben in Größenordnungen gezeigt wurde, mit sehr kleinen Geschwindigkeiten, anderseits mit sehr großen Zähigkeitskoeffizienten und Körperabmessungen zu tun. In der Hydro- und Aerodynamik ist es umgekehrt, man hat dort mit den sehr großen Geschwindigkeiten und sehr kleinen Zähigkeitskoeffizienten und mittleren Körperabmessungen zu tun. Die Form der hydrodynamischen Gleichungen erlaubt in beiden Fällen brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Wie sich dies bei der zahlenmäßigen Durchrechnung auswirkt, wollen wir an einem praktischen Beispiel zeigen, nämlich am Fall der Kaverne Braz in Vorarlberg. Für die Erlaubnis zur Veröffentlichung der nachfolgenden Zahlen möchte ich dem Zentralinspektor des Elektrifizierungsamtes der Österr. Bundesbahnen, Herrn Dipl.-Ing. E. Traeg, bestens danken. Als Ingenieurgeologe hat Herr Dr.-Ing. L. Müller (Salzburg) gewirkt. Die komplizierte Querschnittsform (nichtanalytische Berandung) der Kaverne war rechnerisch nicht zu erfassen. Die Untersuchung im Gebiete der elastischen Formänderungen wurde deshalb spannungsoptisch von L. Föppl in München durchgeführt. Wir haben uns für die hydrodynamischen Berechnungen nach den oben angegebenen Definitionen als Näherung mit der Lamb-Oseenschen Lösung für einen Kreiszylinder begnügt. Noch eine Schwierigkeit ergab sich dadurch, daß die Stromrichtung nicht senkrecht zur Zylinderachse stand, sondern schief. Wir waren aber in der Lage, die Schubspannungen an der Kavernenwand den dort verwendeten Stahlverankerungen zu übergeben und hiermit den Annahmen der Lamb-Oseenschen Lösung etwas näher zu kommen. Die Kavernenwände wurden bei der Berechnung der Strömung als starr angenommen, die Dimensionierung der Wände erfolgte freilich nach den elastizitätstheoretischen Gleichungen. Nachfolgend werden wir aus der Berechnung der Kaverne Braz nur einige Spannungsausdrücke entnehmen und diese zahlenmäßig auswerten. Wir haben hier die Massenkkräfte vernachlässigt, da diese fast zwanzigmal kleiner sind als der größte Gebirgsdruck.

Die Gleichung für den mittleren Druck (hier eher mittlere Beanspruchung) lautet für den Rand $r = a$ des Kreiszylinders (s. etwa W. Müller², S. 131):

$$p_{r=a} = \frac{C}{4} \cdot \varrho \cdot V_{\infty} \left(\frac{2}{k \cdot a} \cdot \cos \varphi + \cos 2\varphi \right). \quad (3)$$

ϱ ist die Dichte des Gesteins, V_{∞} die Anströmungsgeschwindigkeit in $r = \infty$. Die Konstanten C und k (mit der Dimension $C = [\text{cm/sek}]$, $k = [\text{cm}^{-1}]$) sind

$$C = \frac{2 V_{\infty}}{\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} \bar{\gamma} \cdot k a}, \quad k = \frac{V_{\infty}}{2 \cdot \nu}. \quad (4)$$

ν ist die kinematische Zähigkeit ($\nu = [\text{cm}^2/\text{sek}]$) und $\bar{\gamma} = 1.7881$ ist die Mascheronische Konstante. Für den grauen Kalk der Kaverne Braz haben wir die Dichte $\varrho = 2.75 \cdot 10^{-6} \text{ kgsek}^2/\text{cm}^4$ berechnet. Der Zähigkeitskoeffizient wurde nach Gl. (9) berechnet

$$\mu = G \cdot u / V_{\infty}. \quad (5)$$

Der Schubmodul $G = 10^5 \text{ kg/cm}^2$ wurde aus den Druckversuchen ermittelt. Die Verschiebung $u = 5.2 \text{ cm}$ wurde der statischen Berechnung entnommen. V_{∞} wurde, mangels einer Universalprüfmaschine, aus der gemessenen Verschiebung und Versuchs-

dauer eines einachsigen Druckversuches ermittelt: $V_{\infty} = 3.6 \cdot 10^{-5}$ cm/sek. Mit diesen Zahlen ergibt sich nach Gl. (5) der Zähigkeitskoeffizient zu

$$\mu = 1.42 \cdot 10^{10} \text{ kgsek/cm}^2.$$

Gl. (5) benützen wir nur dann, wenn kein versuchsmäßig ermittelter Zähigkeitskoeffizient vorliegt. Dann lautet die kinematische Zähigkeit

$$\nu = \mu/\rho = 0.51 \cdot 10^{16} \text{ cm}^2/\text{sek}.$$

Der Halbmesser der Kaverne beträgt $a = 1.214 \cdot 10^3$ cm.

Um die Konstanten Gl. (4) zu berechnen, müssen wir die Anströmungsgeschwindigkeit V_{∞} kennen. Diese hätten wir, falls uns eine Universalprüfmaschine zur Verfügung gestanden hätte, wie folgt ermittelt: Die Grenzspannungen in dem Gebirge werden aus der Arbeit des Verfassers⁷ berechnet, diese in einer Universalprüfmaschine nachgeahmt und so die Formänderungsgeschwindigkeit ermittelt. Diese Geschwindigkeit hätten wir als unendlich ferne Geschwindigkeit aufgefaßt, die wir in Gl. (3) und (4) als V_{∞} benützt hätten. Mangels einer solchen Maschine haben wir näherungsweise, wie oben, V_{∞} gleich der aus dem Druckversuch ermittelten Geschwindigkeit gesetzt. Es ist also $V_{\infty} = 3.6 \cdot 10^{-5}$ cm/sek. Mit diesen Zahlen lauten dann die Konstanten nach Gl. (4)

$$C = 1.75 \cdot 10^{-6} \text{ cm/sek}, \quad k \cdot a = 4.24 \cdot 10^{-8}.$$

Da in Gl. (3) der Ausdruck $C \rho V_{\infty}$ dem Staudruck der idealen (reibunglosen) Flüssigkeiten entspricht, so haben wir in Gl. (3) den Ausdruck $(C/4) \rho V_{\infty} \cdot \cos 2\varphi$ vernachlässigt, da diese Größe selbstverständlich sehr klein ist. Dann ergibt sich nach Gl. (3):

$$p_{r=a} = \frac{1}{4} \cdot 1.75 \cdot 10^{-6} \cdot 2.75 \cdot 10^{-6} \cdot 3.6 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2 \cos \varphi}{4.24 \cdot 10^{-18}},$$

bzw.

$$p = 20.5 \cdot \cos \varphi \quad (\text{in kg/cm}^2).$$

Dieses Ergebnis liefert für die weitere Berechnung brauchbare Werte. Man kann also mit sehr kleinen Geschwindigkeiten und sehr großen Zähigkeiten gleich so rechnen, wie in der Hydro- und Aerodynamik mit sehr großen Geschwindigkeiten und sehr kleinen Zähigkeitskoeffizienten. Hier ist charakteristisch der Faktor $\cos \varphi$, der für $\varphi = \pi$ negativ wird. Hiermit tritt auch bei festen Stoffen infolge der Formänderungsgeschwindigkeiten die Sogwirkung wie bei Flüssigkeiten. Diese Sogwirkung wird in der Wirklichkeit etwas kleiner, da hier jedoch die statische Beanspruchung vom Einfluß ist.

Die charakteristische Spannungsgröße in den Spannungsgleichungen — wie z. B. in Gl. (1) allgemein angedeutet ist — lautet für den Fall der Strömung um einen Kreiszylinder

$$\mu \cdot C/a, \quad \text{wie z. B. bei } \tau_{r=a} = (\mu C/a) \cdot \sin \varphi \cos 2\varphi,$$

wobei die Konstante C nach Gl. (4) die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Für den Fall der Kaverne Braz lautet diese Größe

$$\mu C/a = 1.42 \cdot 10^{10} \cdot 1.75 \cdot 10^{-6} / 1.214 \cdot 10^3 = 20.5 \text{ kg/cm}^2.$$

Auch dieses Ergebnis hat sich in der weiteren Anwendung als brauchbar erwiesen.

Bei der Dimensionierung der Kavernenwände in Braz wurde noch folgendes berücksichtigt: 1. Da die elastischen Setzungen größtenteils schon während des Baues (insbesondere während der Beschießung) abklingen, so wurde ein Verminderungskoeffizient geschaffen, nach dem die Kavernenwände nur mit einer Beanspruchung entsprechend den bleibenden Sitzungen belastet werden. — 2. Es wurde noch der Unterschied in den Setzungen des Gesteins und der Kavernenwände berücksichtigt.

4. Einige Vergleiche zwischen festen und flüssigen Stoffen.

In der Hydrodynamik fester Stoffe muß man wie sonst in der Hydrodynamik bei einem umströmten Körper etwa die Druck- und Sogseite unterscheiden. In der Festigkeitslehre wird dagegen mit einer symmetrischen Spannungsverteilung z. B. um eine Kerbe bei symmetrischer Belastung und symmetrischem Körper gerechnet, und zwar nach dem Newtonschen Gesetz der Wirkung und Gegenwirkung der Kräfte. Die Formänderungen eines festen Körpers folgen den Kräften mit gewisser Geschwindigkeit nach, was bei kleineren („technischen“) Körpern erst an der Bruchgrenze



Abb. 1. Druckversuch an einem Marmorprisma $30 \times 30 \times 160$ mm (nach M. Roß und A. Eichinger).

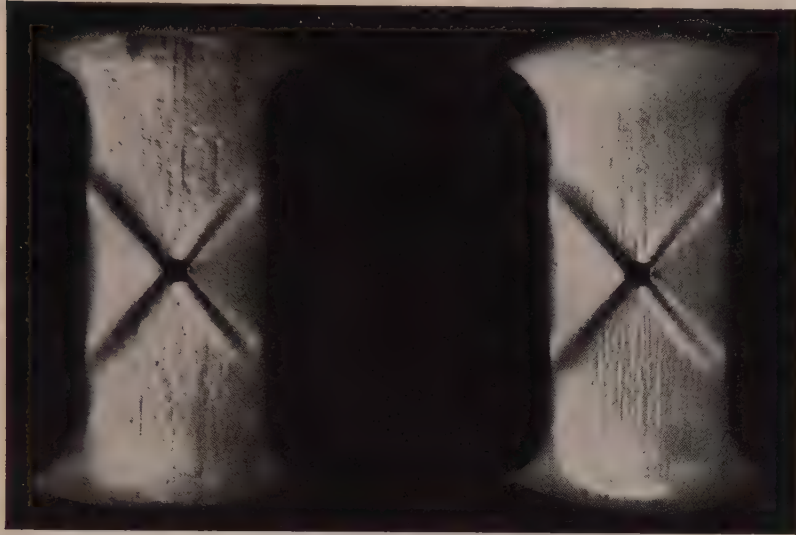


Abb. 2. Sehr hartes Kupfer. Druckversuch mit einem durchgebohrten Körper (nach A. Nadai).

deutlich zum Ausdruck kommt. Beachten wir z. B. einen Druckkörper in einer Materialprüfmaschine, bei der nur eine Druckplatte beweglich ist, während die andere stillsteht. Im Augenblick des Bruches, bei dem sich die Formänderungen nicht so rasch fortpflanzen können wie der Bruchvorgang selbst, entsteht (insbesondere bei längeren Körpern) eine einseitige Zerstörung des Probekörpers, und zwar auf der Seite der beweglichen Druckplatte (Abb. 1). In einem geologischen Körper wurden die einseitige Fortpflanzung der Formänderungen auf verschiedene Arten in Tunnel- und Stollenbau beobachtet.

Eine formallogische Folgerung dieser Untersuchung wäre es, zu verlangen, daß die Formänderungen bei der einachsigen Druckbeanspruchung eines festen Körpers in der Nähe der Druckplatte ähnlich verlaufen wie die Formänderungen eines Wasserstrahles beim Zusammenprall auf einer Wand. Diese vermuteten Formänderungen findet man wirklich an Versuchskörpern aus Eisen und Kupfer (Abb. 2, nach Nadai¹⁰, S. 483). Wir müssen dabei jedoch beachten, daß die Ausbauchung in der Mitte des Druckkörpers in Konkurrenz zu diesen Formänderungen steht, da die Schubspannungen in den nur ein wenig zu den Symmetrieachsen geneigten Schnitten viermal das Vorzeichen wechseln. Vermutlich spielt dabei eine Rolle, welche Formänderung zustande kommt, je nachdem, ob die Quetschgrenze des Materials an den Druckplatten höher oder niedriger liegt als die Schubfließgrenze. Die Probekörper

von Nadai sind mit einer Bohrung in der Mitte versehen, so daß sowohl die Schubfließgrenze als auch die Quetschgrenze an den beiden Druckplatten erreicht wurde. Die Versuche an Aluminium von Roš und Eichinger¹⁶ (Abb. 3) zeigen hingegen nur eine Ausbauchung in der Mitte des Probekörpers.

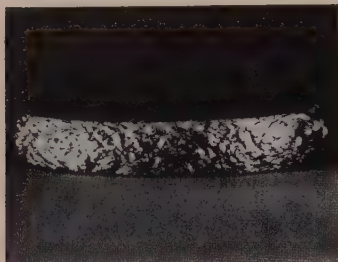


Abb. 3. Aluminium. Einachsiger Druckversuch (nach M. Roš und A. Eichinger).

5. Vergleich mit den geodynamischen Untersuchungen.

Wir werden nachfolgend einige Ergebnisse aus den geodynamischen Untersuchungen kritisch betrachten. Die Gleichung für die Beziehung zwischen dem Zähigkeitskoeffizient μ , dem Schubmodul G und der Jeffreyschen¹⁷ „Relaxationszeit“ T lautet

$$\mu/G = T. \quad (6)$$

Prey⁴ gibt dann eine Näherungsgleichung für die Verschiebungen in x -, y -, z -Richtung an:

$$u = v_x T, \quad v = v_y T, \quad w = v_z T, \quad (7)$$

wo v_x , v_y , v_z die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors sind (allgemein müßte man $du = v_x dt$ nehmen). Tatsächlich hat Prey⁴ (Gl. 7) zur Berechnung der Geschwindigkeiten aus statisch ermittelten Verschiebungen herangezogen: $v_x = u/T$ usw. Der Übergang zwischen den elastizitätstheoretischen und hydrodynamischen Spannungsausdrücken würde sich hiermit wie folgt ergeben:

$$\sigma_x = 2G \cdot \partial u / \partial x = 2G T \cdot \partial v_x / \partial x = 2\mu \cdot \partial v_x / \partial x \quad \text{usw.}, \quad (8)$$

was nur mit der Näherung Gl. (7) gelingt.

Wir werden hier und sonst in unserer geomechanischen Praxis Gl. (6) und (7) nur für die rechnerische, büromäßige Abschätzung des Zähigkeitskoeffizienten μ

$$\mu = G u / v_x = G v / v_y = G w / v_z \quad (9)$$

benützen, und zwar nur dann, wenn keine versuchsmäßigen Angaben des Zähigkeitskoeffizienten vorliegen. Die Strömungsgeschwindigkeiten werden wir dagegen aus der hydrodynamischen Berechnung ermitteln.

Da Gl. (9) aus eben erwähnten Gründen eine gewisse Bedeutung für die Ermittlung des Zähigkeitskoeffizienten hat, werden wir nachfolgend zeigen, daß diese Gleichung nur bei der Gleichsetzung der elastizitäts- (bzw. plastizitätstheoretischen) Spannungs-Dehnungs-Beziehungen mit den Spannungs-Geschwindigkeits-Beziehungen der Hydrodynamik gelten. Diese Gleichsetzung widerspricht der Annahme von Jeffreys¹⁷ für den firmo-viskosen Stoff: $\sigma = \sigma' + \sigma''$. Es wird dann an Hand eines Beispiels gezeigt, wie weit diese Gleichsetzung berechtigt ist.

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der Elastizitätstheorie (bzw. der linearen Plastizitätstheorie, s. z. B. Nadai¹ oder beim Verfasser¹⁸) lauten:

$$\sigma_x' = \sigma_m + 2G \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} G \cdot \text{div } u, \quad \tau_{xy}' = G \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \text{usw.} \quad (10)$$

und die Spannungs-Geschwindigkeits-Beziehungen der Hydrodynamik

$$\sigma_x'' = -p + 2\mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \cdot \text{div } v, \quad \tau_{xy}'' = \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad \text{usw.} \quad (11)$$

¹⁶ M. Roš und A. Eichinger: Bericht Nr. 172 der EMPA, Zürich 1949.

¹⁷ H. Jeffreys: The Earth, 2. Aufl. Cambridge, 1929.

¹⁸ C. Torre: Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. 15, 116, 145 (1949); Österr. Ingenieur-Arch. 4, 93 (1950).

Die Gleichsetzung der Gl. (10) und (11), also $\sigma_x' = \sigma_x''$ usw. bzw. $\tau_{xy}' = \tau_{xy}''$ (wobei das Vorzeichen bei $-p$ und $+\sigma_m$ nur formale Bedeutung hat), liefert folgende drei Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (Gu - \mu v_x) &= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{div} (Gu - \mu v), \\ \frac{\partial}{\partial y} (Gv - \mu v_y) &= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{div} (Gu - \mu v), \\ \frac{\partial}{\partial z} (Gw - \mu v_z) &= \frac{1}{3} \cdot \operatorname{div} (Gu - \mu v). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Da die linken Seiten dieser Gleichungen verschieden sind, die rechten dagegen gleich, so widersprechen sie sich gegenseitig. Eine mit der Gl. (9) identische Lösung ergibt sich aus der Nullsetzung der zu differenzierenden Ausdrücke, die in Vektorform lauten:

$$Gu - \mu v = 0. \quad (13)$$

Diese Gleichung ist mit der Gl. (9) identisch, was zu beweisen war. Die Nullsetzung der Gesamtausdrücke in Gl. (12) links liefert nach der Integration den gleichen Ausdruck wie in Gl. (13) gleich einer Konstanten, die in Gl. (13) gleich Null ist. Die Nullsetzung der Gesamtausdrücke in Gl. (12) rechts besagt, daß — bei stationärer Strömung und $G, \mu, \varrho = \text{konst.}$ — die Volumsdehnung proportional der Quelldichte ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = T \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = T \cdot \frac{e}{\varrho}.$$

Als Veranschaulichung dieser Näherung dient uns zunächst folgende Betrachtung: Bezeichnen wir eine Lösung der Spannungen nach der Elastizitätstheorie (bzw. nach der linearen Plastizitätstheorie) mit

$$\sigma_x' = p \cdot f_x(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad \text{usw.}, \quad (14)$$

wo p die Oberflächenbelastung in der Elastizitätstheorie bzw. eine einachsige Grenzbeanspruchung in der Plastizitätstheorie ist und f_x eine Funktion der bezogenen Koordinaten $\bar{x} = x/x_0$ usw., dann ergibt sich aus der Gleichsetzung der Gl. (1) und (14) der Ausdruck für den Zähigkeitskoeffizienten zu

$$\mu = \frac{a p f_x}{v_x F_x} = \frac{a p f_y}{v_y F_y} = \frac{a p f_z}{v_z F_z}. \quad (15)$$

Diese Gleichsetzung bringt uns eine andere Gleichung für den Zähigkeitskoeffizienten μ als in Gl. (9). Er hängt ab von einer Körperdimension a , von der Belastung p , von der Geschwindigkeit v_x, v_y, v_z und durch die Ausdrücke f_x/F_x usw. von den Koordinaten x, y, z . Erst durch die Annahme $f_x = F_x$ usw. werden die Gl. (9) und (15) ähnlich. Setzen wir näherungsweise $a \sim 10^3 \text{ cm}$, $p \sim 10^2$ bis 10^3 kg/cm^2 , $v_x \sim 10^{-5}$ bis 10^{-6} cm/sek , dann folgt der Zähigkeitskoeffizient von der bekannten Größe

$$\mu \sim 10^3 \cdot 10^{2,3} / 10^{-5, -6} = 10^{10} \text{ bis } 10^{12} \text{ kgsek/cm}^2.$$

6. Strömung zwischen ebenen Wänden und Beanspruchung einer plastischen Masse zwischen zwei reibenden Platten.

Eine weitere Kritik dieser Gleichsetzung der Spannungen wird uns das folgende Beispiel bringen: Wir untersuchen die Strömung einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei ebenen, ruhenden Wänden¹⁹, die eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Problem einer plastischen Masse zwischen zwei reibenden Platten

¹⁹ S. z. B. W. Müller: ² (S. 34) oder H. Schlichting: Grenzschicht-Theorie. Braun. 1951.

von Prandtl²⁰ hat. Im ersten Fall erfolgt die Strömung durch das konstante Druckgefälle bzw. die Geschwindigkeit

$$dp/dx = C, \quad p = Cx + C_1; \quad \text{bzw.} \quad v_x = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right). \quad (16)$$

Die hydrodynamischen Spannungen lauten dann (x = Längsrichtung der Strömung, z = senkrecht zur Strömung)

$$\sigma_x'' = \sigma_z'' = -p = -(Cx + C_1), \quad \tau_{xz}'' = z \cdot \frac{dp}{dx} = Cz. \quad (17)$$

Für den Fall einer plastischen Masse zwischen zwei reibenden Platten lauten die Spannungen

$$\sigma_x' = C_1 + \sigma_0 x/2h \pm \sigma_0 \sqrt{1 - z^2/h^2}, \quad \sigma_z' = C_1 + \sigma_0 x/2h, \quad \tau_{xz}' = -\sigma_0 z/2h. \quad (18)$$

Die Gleichsetzung $\sigma_z' = \sigma_z''$ und $\tau_{xz}' = \tau_{xz}''$ liefert die Konstante C des Druckgefälles Gl. (16)

$$C = dp/dx = -\sigma_0/2h. \quad (19)$$

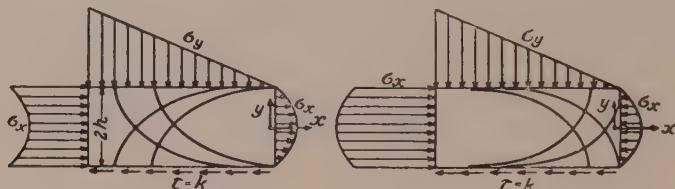


Abb. 4. Plastische Masse zwischen parallelen reibenden Platten. Spannungszustand und Gleitlinien. Links passiver, rechts aktiver Fließzustand hinter der starren Platte (nach A. Nadai).

Hingegen würde die Gleichsetzung $\sigma_x' = \sigma_x''$ wegen des Ausdruckes $\pm \sigma_0 \sqrt{1 - z^2/h^2}$ eine Strömung auch in z -Richtung verlangen. Bei Vernachlässigung dieses Ausdruckes wird die Grenzbedingung nicht befriedigt. Die Größe dieser Vernachlässigung kann man aus Abb. 4 von Nadai⁹ abschätzen und sich für ihre Anwendung in der Praxis entscheiden unter der Berücksichtigung, daß es sich hier nicht um eine Strömung mit Grenzbeanspruchung handelt. Aus Gl. (16) und (19) lautet dann die Geschwindigkeit:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\sigma_0 h}{4\mu} \cdot \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \\ \text{mit der größten und mittleren Geschwindigkeit} \\ \max v_x &= \sigma_0 h/4\mu, \quad v_{xm} = \sigma_0 h/6\mu. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die Durchflußmenge ergibt sich dadurch

$$Q = \sigma_0 h^2/3\mu. \quad (21)$$

Gl. (16) bis (21) bieten die Möglichkeit, die Verschiebungsgeschwindigkeiten (Materialtransport) und die Drücke am Semmeringtunnel bei Wien zu berechnen, da das geologische Bild dort der Zusammenpressung des sehr plastisch verformten Gesteins (Myloniten und Ultramyloniten) zwischen zwei Bergen (= zwei reibenden Platten) entspricht. Das Gestein ist in diesem Gebiet noch so stark im Fluß begriffen, daß man sich überlegen müßte, ob die Berechnung des plastischen Fließens mit Berücksichtigung der Grenzbeanspruchung nach Geiringer^{12, 14} erfolgen müßte. — Wir begnügen uns nachfolgend nur mit einer Abschätzung der Spannungen und Verschiebungen am Semmeringtunnel bei Wien. Diese Berechnung gilt, bevor noch das Bohren des Tunnelprofils die Spannungsstörungen mit sich gebracht hat, die noch

²⁰ L. Prandtl: Z. angew. Math. Mechan. 3, 401 (1923).

größere Beanspruchungen und Verschiebungen unmittelbar um das Tunnelrohr verursachen.

Mit einer Zugfestigkeit von ungefähr $\sigma_0 = 20 \text{ kg/cm}^2$, mit einem verhältnismäßig kleinen Plattenabstand von $h = 500 \text{ cm}$ und mit dem Zähigkeitskoeffizienten $\mu = 1.75 \cdot 10^{11} \text{ kgsek/cm}^2$ ergibt sich nach Gl. (20) die größte Geschwindigkeit des zusammengedrückten Gesteins in der Richtung der Tunnelachse

$$\max v_x = 20 \cdot 500 / 1.75 \cdot 10^{11} = 0.143 \cdot 10^{-7} \text{ cm/sek,}$$

bzw. eine Jahresgeschwindigkeit von $(1 \text{ Jahr} = 3.16 \cdot 10^7 \text{ sek})$

$$\max v_x = 0.452 \text{ cm/Jahr.}$$

Die mittlere Geschwindigkeit erhält man dann

$$v_{xm} = 2 \cdot \max v_x / 3 = 0.3 \text{ cm/Jahr.}$$

Hier ist von Bedeutung, daß in 100 Jahren eine maximale Verschiebung von 45 cm bzw. eine mittlere Verschiebung von 30 cm erfolgt, wobei die Spannungserhöhungen um das Tunnelrohr nicht berücksichtigt wurden. Ebenso die Stellen, wo Ton und weiche Erde vorkommen, wurden durch Annahme der verhältnismäßig hohen Zugfestigkeit von $\sigma_0 = 20 \text{ kg/cm}^2$ außer acht gelassen. — Der Semmeringtunnel bei Wien ist zwischen zwei sich gegenseitig drückenden Bergen unter einem Sattel gebaut und zieht sich hauptsächlich durch ein infolge des Gebirgsdruckes fein zermahltes Gestein. Wegen dieses großen Gebirgsdruckes wurde der alte zweigleisige Tunnel nach einem Jahrhundert verkehrsunfähig. Den großen Gesteintransport muß das neue Tunnelrohr ebenso ertragen wie das alte; dazu kommen dann noch die Spannungstörungen um das Tunnelprofil. Diese letzteren bringen zweifelsohne stellenweise Zugspannungen mit sich, die man einem nicht armierten Beton nicht anvertrauen kann. Diese Zugspannungen ließen sich sowohl theoretisch als auch spannungsoptisch nachweisen. — Wie Herr W. Schmidt (T. H. Wien) dem Verfasser mitgeteilt hat, konnte auf der Baustelle aus der Festigkeit der gestauchten Tiranten die Mindestbeanspruchung des Tunnelgewölbes ungefähr berechnet werden. Diese beträgt etwa 33.5 kg/cm^2 . Aus Gl. (17) mit $C_1 = \gamma H = (3 \text{ t/m}^3) \cdot (35 \text{ m}) = 10 \text{ kg/cm}^2$, mit ungefähr $x \cong -2h$ und $\sigma_0 = 20 \text{ kg/cm}^2$ ergibt sich ein Gebirgsdruck von $\sigma_z = -30 \text{ kg/cm}^2$, welcher der Größenordnung nach mit dem oben erwähnten übereinstimmt.

W. Schmidt konnte — neben verschiedenen anderen tektonischen Erscheinungen — auch beobachten, daß die Fließrichtung des zusammengepreßten Gesteins ungefähr in der Richtung der Tunnelachse liegt, während der Druck praktisch nur fast senkrecht zur Tunnelachse wirkt. Das stimmt mit den Annahmen der Berechnung überein. Dieser Fall ist von ganz anderer Beschaffenheit als der Fall bei der Kaverne Braz in Vorarlberg, wo die Winkel der Klüfte im Fels die Grundlage der Berechnung des Gebirgsdruckes bildeten. Man kann also nach geeigneter geologischer Vorarbeit verschiedene Fälle in der Tektonik mit Hilfe der Mechanik berechnen.

7. Der Zähigkeitskoeffizient fester Stoffe.

Zum Schluß vergleichen wir die berechneten Zähigkeitskoeffizienten fester Stoffe mit den versuchsmäßig ermittelten. Zunächst einige Werte nach Gutenberg⁵ (bei Zimmertemperatur):

Steinsalz.....	$\mu \sim 10^{12} \text{ kgsek/cm}^2$	
Blei	$\mu \sim 10^{10}$	„
Spat	$\mu \sim 10^{10}$	„
Kolophonium .	$\mu \sim 10^{11}$	„
Asphalt.....	$\mu \sim 10^4$	„

Nadai²¹ gibt für das Kriechen von Metallen ein Sinusgesetz von Prandtl²² an, in dem zwei Materialkonstanten für den rostfreien Stahl

$$w_0 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ h}^{-1} \quad \text{und} \quad \sigma_0 = 43.6 \text{ kg/cm}^2$$

vorkommen, aus welchen man den Zähigkeitskoeffizienten berechnen kann.

$$\mu = \sigma_0/w_0 = 43.6/2 \cdot 10^{-8} = 7.83 \cdot 10^{12} \sim 10^{13} \text{ kgsek/cm}^2.$$

Nach Ledersteger²³ nimmt Prey bei der Berechnung von Kontinentalverschiebungen $\mu \sim 10^9 \text{ kgsek/cm}^2$. Für die näherliegenden Epochen wird $\mu \sim 10^{11}$ bis $10^{12} \text{ kgsek/cm}^2$, wie beim Material in den obersten Schichten der Erdkruste, vorgeschlagen. Mit der Annahme von $\mu \sim 10^{14}$ bis $10^{15} \text{ kgsek/cm}^2$ kommt man mit den Geologen in Konflikt bezüglich des Alters der Erde. — Man sieht schon aus dieser kurzen Zusammenstellung, daß die Annahme des Zähigkeitskoeffizienten $\mu \sim 10^{10}$ bis $10^{12} \text{ kgsek/cm}^2$ für die technische Praxis ausreicht, wobei vorgeschlagen wird, beim Fehlen der Versuchswerte den Zähigkeitskoeffizienten nach Gl. (9) zu berechnen.

(Eingegangen am 3. September 1952.)

Buchbesprechungen.

Scientific Thought in the Twentieth Century. An Authoritative Account of Fifty Years' Progress in Science. Herausgegeben von *A. E. Heath*. XV, 387 S. London: Watts & Co. 1951. £ 2. 2s. net.

Das Buch stellt sich die Aufgabe, dem Leser ein Bild der Entwicklung der Wissenschaften in den ersten fünfzig Jahren unseres Jahrhunderts zu geben. Eine Reihe namhafter englischer Wissenschaftler haben sich zu diesem Zwecke zusammengetan und über ihre speziellen Arbeitsgebiete einen klar verständlichen Beitrag zu diesem Buche geschrieben.

Der Inhalt des Buches gliedert sich daher in eine Reihe von abgeschlossenen Kapiteln über die Entwicklung der verschiedensten Wissenschaftszweige. Neben der „Philosophie der Wissenschaft“ (Prof. R. A. Fisher) werden folgende Wissenschaften behandelt: Statistik (Prof. A. J. Ayer), Astronomie (Sir Harold Spencer Jones), Chemie (Andrew Kent), Geologie (Prof. Duncan Leitch), Zoologie (Prof. P. B. Medawar), Genetik (E. B. Ford), Allgemeine Medizin (J. C. Hawksley), Sozialmedizin (Alice Stewart), Neurologie (Derek Richter), Psychologie (Sir Cyril Burt), Sozialanthropologie (Prof. Meyer Fortes) und Soziologie (Donald G. Macrae).

Jedes einzelne Kapitel gibt einen geschlossenen Überblick über die Entwicklung des jeweiligen Wissenschaftszweiges in den letzten fünfzig Jahren. Der Leser erhält nach Studium des Buches ein Bild von dem gewaltigen Fortschritt, den die menschliche Erkenntnis in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts gewonnen hat.

Es wäre zu wünschen, daß dieses vortreffliche Buch auch in einer deutschen Ausgabe erscheint.

F. Kracmar, Wien.

Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. Von *E. Lohr*. Zweite Auflage mit einem Nachtrag. Mit 34 Textabb., XV, 488 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1950. Geb. DM 24.—.

Die im Jahre 1939 erschienene erste Auflage dieses Werkes war zu Beginn des Jahres 1944 bereits vergriffen. Wir unterlassen es, hier auf eine Besprechung der früheren Auflage einzugehen und begnügen uns hervorzuheben, daß sich der Verfasser entschloß, für die Neuauflage den bereits vorhandenen Text unverändert zu lassen, ihm jedoch einige in sich abgeschlossene Ergänzungen hinzuzufügen. Die wichtigsten Themen, die in diesen Ergänzungen erörtert werden, handeln über Derivationen in krummlinigen Koordinaten, Reihenentwicklungen, Matrizen und Integralgleichungen. Ein Kapitel über ebene Vektorrechnung und Funktionentheorie, ferner die Entwicklung der Vektorrechnung der speziellen Relativitätstheorie und der Grundzüge des mathematischen Formalismus der Diracschen Theorie des Elektrons. In allen diesen Gebieten ist es dem Verfasser in erster Linie darum zu tun, diese Gebiete vom Standpunkt des von ihm in der

²¹ A. Nadai: *Allg. Bau-Ztg.* (A. Leons Gedenkheft) 7, 4 (1952).

²² L. Prandtl: *Z. angew. Math. Mech.* 8, 85 (1928).

²³ K. Ledersteger: *Österr. Z. Vermessungswes.* 1950, 9 (Sonderdruck).

früheren Auflage bereits entwickelten Formalismus zu durchdringen. Der Verfasser sagt selbst, daß es ihm nicht darum zu tun war, ein Lehrbuch der theoretischen Physik und noch weniger ein solches der Quantenmechanik zu schreiben. Er hat sich lediglich die Aufgabe gestellt, an Hand der ausgewählten physikalischen Anwendungen in die Praxis der Vektor- und Dyadenrechnung einzuführen. Daß das Buch einem tatsächlich vorhandenen Bedürfnis entspricht, geht aus der Tatsache hervor, daß während des Krieges J. W. Edwards, Publisher in Michigan, einen Neudruck der alten Auflage herausgab.
P. Funk, Wien.

An Introduction to the Theory of Control in Mechanical Engineering. Von R. H. Macmillan. Mit 144 Textabb., 1 Tafel, XIV, 195 S. Cambridge: At the University Press. 1951. Geb. 30s. net.

Die wachsende Bedeutung der Regeltechnik, deren theoretische Weiterentwicklung vorwiegend durch die Fernmeldetechnik begünstigt wurde, so daß die neuen Rechenmethoden diesem Fachkreis vorbehalten blieben, veranlaßten den Verfasser, den großen Kreis der Maschinenbauingenieure mit diesen modernen Verfahren bekannt zu machen.

Der Verfasser sieht sich dabei einer schwierigen Aufgabe, die im Konservativismus der praktischen Ingenieure begründet liegt, gegenüber. Er bringt dies auch deutlich zum Ausdruck, indem er einleitend sagt: „Es scheint eine bedauernswerte Tendenz unter den praktischen Ingenieuren vorzuherrschen, die mathematische Behandlung selbsttätiger Regelungen mit Mißtrauen zu betrachten; sie ziehen den ‚gesunden Menschenverstand und die Erfahrung‘ einer sorgfältigen Untersuchung vor, obgleich brauchbare Methoden schon seit Jahren zur Verfügung stehen.“

Dem gesteckten Ziel entsprechend sind die dem Leser zugemuteten mathematischen Vorkenntnisse sehr gering und erschöpfen sich in der Auflösung einfacher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die ersten mehr deskriptiven Kapitel führen den Leser in die regeltechnische Nomenklatur ein, bringen eine Darstellung der Elemente des Regelkreises, deren Grundlagen und legen die Bedeutung der die Übertragungssysteme kennzeichnenden Zeitkonstanten dar. Anschließend Stabilitätsuntersuchungen unter Verwendung des Stabilitätskriteriums von Hurwitz vervollständigen den elementaren Teil des Werkes.

In den folgenden Abschnitten ist den analytischen Methoden unter Verwendung der Laplace-Transformation und den graphischen Methoden — der Ortskurventheorie —, dem Stabilitätskriterium von Nyquist breiter Raum gewidmet.

Der sachlich einwandfreie Aufbau des Buches, verbunden mit einer Einführung in die Funktionentheorie und die Laplace-Transformation und die klare Darstellung komplizierter Regelvorgänge machen dieses Werk zu einem ausgezeichneten Lehrbuch, das sicherlich von Studenten und der Theorie aufgeschlossenen Praktikern mit Beifall aufgenommen werden wird.
F. Schulz, Wien.

Lehrbuch der Technischen Mechanik für Ingenieure und Physiker. Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Von Th. Pöschl. Zweiter Band: Elementare Festigkeitslehre. Zweite, umgearbeitete Auflage. Mit 159 Textabb., VII, 244 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. DM 16.50, geb. DM 19.50.

Der zweite Band des bekannten Lehrbuches der Technischen Mechanik, der von der elementaren Festigkeitslehre handelt, liegt nun in zweiter, umgearbeiteter Auflage vor.

In 15 Abschnitten werden in anschaulicher, aber dabei präziser Form die Grundthesen der Festigkeitslehre entwickelt. Nach den allgemeinen Abschnitten über den Spannungs- und Verzerrungszustand wird das Verhalten der festen Körper bei Belastungen auf Grund der Versuchsdaten dargestellt und anschließend werden die Bruchhypothesen besprochen. Daran schließt sich das Hookesche Gesetz für infinitesimale Verformungen. Den speziellen Beanspruchungen auf Zug und Druck und zugehörigen statisch unbestimmten Aufgaben sind eigene Abschnitte gewidmet. Vor der Besprechung der Biegung gerader Stäbe wird ein Kapitel über Flächenträgheitsmomente eingeschaltet. Es folgen Abschnitte über Verdrehung zylindrischer Stäbe über zusammengesetzte Beanspruchung und über Biegung von Stäben mit gekrümmter Mittellinie. Daran schließt der Abschnitt über Knickung gerader Stäbe, in der auch die Engesser-Kármánsche Theorie besprochen wird. Hierauf werden die Arbeitssätze der Festigkeitslehre, die bereits vorher gelegentlich herangezogen wurden, im Zusammenhang besprochen. Mit einem Abschnitt über Träger auf nachgiebiger Bettung über elastische Schwingungen, mit besonderer Berücksichtigung der Fachwerksschwingungen, schließt das reichhaltige Werk.

Gegenüber der ersten Auflage ist eine größere methodische Vereinheitlichung der Darstellung festzustellen, sowie eine inhaltliche Bereicherung, insbesondere bei der Darstellung der Berechnungsverfahren für die Behandlung statisch unbestimmter Systeme.

Es ist somit zu hoffen, daß die Anzahl der Freunde, die sich das Lehrbuch bereits in der ersten Auflage erworben hat, mit der zweiten Auflage einen beträchtlichen Zuwachs erfahren wird.

G. Heinrich, Wien.

Verbrennungskraftmaschinen. Thermodynamik und versuchsmäßige Grundlagen der Verbrennungsmotoren und Gasturbinen. Von *F. A. F. Schmidt*. Dritte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 198 Textabb. und 5 Tafeln, 427 S. München: R. Oldenbourg. 1951. Geb. DM 48.—.

Die Verbrennungskraftmaschine hat in den letzten Jahren die Dampfmaschine auf vielen Gebieten verdrängt und im Verkehrswesen eine gewaltige Umwälzung bewirkt. Durch ihre Bedeutung wurde aber auch die Entwicklung der Thermodynamik sehr beeinflusst, da sie eines ihrer größten Anwendungsgebiete geworden ist. Dieses Gebiet der Thermodynamik behandelt das vorliegende Buch, dessen Verfasser viele Jahre Leiter des Institutes für motorische Arbeitsverfahren und Thermodynamik der deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Berlin gewesen ist.

Kenntnisse der Grundlagen der Wärmelehre sind zum Verständnis des Inhaltes und motorische Erfahrungen zu dessen praktischer Verwertung wohl erforderlich. Physikern und Chemikern wird es nützlich sein, die Anwendung ihrer Wissenschaft auf diesem Gebiete verwertet zu sehen und so am besten die Entwicklungsrichtung der Thermodynamik für dieses Anwendungsgebiet erkennen zu können. Motortechner werden in dem Buch, ohne auf alle Ableitungen voll eingehen zu müssen, wertvolle, praktisch unmittelbar verwertbare Forschungsergebnisse finden.

Wie der Untertitel besagt, behandelt das Buch die Thermodynamik und die versuchsmäßigen Grundlagen der Verbrennungsmotoren und Gasturbinen, nicht aber deren konstruktive oder technologische Fragen. Die vorliegende dritte Auflage ist auf Grund der neuesten Erkenntnisse bearbeitet und bringt so auch die während des Krieges zurückgehaltenen Entwicklungsergebnisse. Gegenüber der ersten Auflage aus dem Jahre 1939 ist besonders das in einem eigenen Abschnitt ausführlich behandelte Gebiet der Gasturbinen zu erwähnen, die in den letzten Jahren sowohl bei den Strahltriebwerken von Flugzeugen als auch für stationäre Kraftanlagen sehr an Bedeutung gewonnen haben. Aber auch sonst ist der Inhalt sehr erweitert, der ausführlich die Wärme- und Strömungsfragen in Verbrennungsmotoren (mit und ohne Aufladung) und in Gasturbinen, Sonderheiten und Flugmotoren und das Zusammenarbeiten von Triebwerk und Flugzeug behandelt. Als Anhang sind übersichtliche Berechnungsbeispiele und Sonderprobleme der Thermodynamik, wie unter anderem über chemisches Gleichgewicht und Dissoziation, hinzugefügt. Die umfangreichen Quellenangaben sind auch sehr vermehrt worden und als wertvolle Neuerung sind noch Rechentafeln beigelegt, die allerdings in einem größeren Maßstab für die praktische Verwendung geeigneter wären.

So wird das Buch, dessen frühere Auflagen schon sehr geschätzt wurden, sicher viele Freunde finden, da es, abgesehen von einigen leicht erkennbaren kleinen Druckfehlern, auch in Druck und Ausstattung sehr gut ausgeführt ist.

F. Lauer, Wien.

Handbuch des Wasserbaues. Von *A. Schoklitsch*. In zwei Bänden. Zweite, neubearbeitete Auflage. Erster Band: Mit Textabb. 1—722 und Zahlentafel 1—87, X, S. 1—475. 1950. — Zweiter Band: Mit Textabb. 723—2049 und Zahlentafel 88—113, VIII, S. 479—1072. 1952. Wien: Springer-Verlag. Geb. S 777.—, sfr. 159.—, \$ 37.—, DM 155.40.

Es wird sicher von allen am Wasserbau interessierten Kreisen sehr begrüßt werden, daß dieses das ganze Gebiet mit Ausnahme des Seebaues umfassende und in der Fachliteratur einzig dastehende Werk nun wieder erschienen ist. Der Verfasser hat in der neuen Auflage am Gesamtaufbau des Werkes nichts geändert; es gliedert sich daher auch dieser in die Abschnitte Meteorologie, Gewässerkunde und Hydraulik, Wasserversorgung, Ortsentwässerung des ersten Bandes und Stauwerke und Entnahmeanlagen, Wasserkraftanlagen, Meliorationen, Flußbau, Verkehrswasserbau des zweiten Bandes. Überall hat jedoch eine sorgfältige Anpassung an den gegenwärtigen Stand der Forschung und die Aufnahme der neuesten Bauweisen stattgefunden, wogegen einiges Entbehrliches weggeblieben ist. Gelegentlich sind, dem Charakter des Buches entsprechend, auch „noch offene Fragen“ erörtert worden, soweit deren Behandlung für den entwerfenden Ingenieur nutzbringend ist. Die gleichzeitig vorgenommene Umreihung einiger Kapitel wirkt sich im allgemeinen recht vorteilhaft im Sinne einer organischeren Gliederung des Stoffes aus.

Eine der bedeutendsten Änderungen der neuen Auflage gegenüber der ersten besteht wohl darin, daß alle Gründungsfragen, aber auch einige statische Untersuchungen weggeblieben sind. Der Verfasser will diese Dinge in der hoffentlich bald zu erwartenden zweiten Auflage seines Grundbaubuches zusammenfassen. Mancher Leser wird vielleicht auch eine etwas ausführlichere Behandlung der Bogenstrecken vermissen. Nicht sehr günstig wirkt sich leider bei der neuen Auflage der Umstand aus, daß die Abbildungen gegenüber dem Text manchmal um eine beträchtliche Seitenanzahl nacheilen. Ansonst ist aber auch die Ausstattung des Werkes als vorzüglich zu bezeichnen.

E. Czitary, Wien.

Autorenverzeichnis.

- Basch, A., Die Grundlagen der Mechanik. Von G. Mie. (Buchbesprechung.) S. 70.
- Bauer, H., Tensorielle Behandlung elektrotechnischer Probleme. S. 4.
- Bereis, R., Die Fernpolstellung der ebenen Bewegung. S. 246.
- , Perspektiver Schnellriß. S. 265.
- Brandstaetter, F., Entwicklung und Anwendung einer magnetischen Feldmeßsonde zur Untersuchung von Ferromagnetika. S. 20.
- Bruniak, R., Die amerikanischen Einheitsverfahren zur Untersuchung von Wasser und Abwasser. (Buchbesprechung.) S. 66.
- , Hermann Recknagels „Hilfstafeln zur Berechnung von Warmwasserheizungen“. Vollständig neu bearbeitet von E. Keller. Achte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 73.
- , Die Maxwellsche Theorie in veränderter Formulierung. Von L. Kneissler. (Buchbesprechung.) S. 141.
- , Experiments on Aerodynamic Cooling. Von L. F. Ryan. — Untersuchungen an einem Gegenlaufpropeller im Windkanal. Von M. Degen. (Buchbesprechung.) S. 143.
- Craemer, H., Einige Iterations- und Relaxationsverfahren für drehsymmetrisch beanspruchte Zylinderschalen. S. 35.
- , Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Größe der Versuchskörper, betrachtet auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung. S. 145.
- Czitary, E. und G. Heinrich, Abwurfsicherheit des Trageisles auf einem Seilschuh. S. 372.
- , Einflußfelder elastischer Platten. Von A. Pucher. (Buchbesprechung.) S. 71.
- , Tafeln und Tabellen zur Festigkeitslehre. Von L. Föppl und G. Sonntag. (Buchbesprechung.) S. 141.
- , Handbuch des Wasserbaues. Von A. Schoklitsch. Zweite Auflage. I. und 2. Band. (Buchbesprechung.) S. 430.
- Embacher, W., Einfaches Gerät zur mechanischen Auswertung von Vermessungsaufgaben. S. 295.
- Federhofer, K., Berechnung des kreiszylindrischen Flüssigkeitsbehälters mit quadratisch veränderlicher Wandstärke. S. 43.
- , Stabilität der Kreiszylinderschale mit veränderlicher Wandstärke. S. 277.
- , Vorlesungen über technische Mechanik. Von A. Föppl. 3. Band. Fünfzehnte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 67.
- Franke, H. W., Spektrographische und elektronenoptische Kenngrößen bei Richtungs-doppelfokussierung. S. 105.
- Fröhlich, O. K., Bodenuntersuchungen für Ingenieurbauten. Von E. Schultze und H. Muhs. (Buchbesprechung.) S. 74.
- Funk, P., Alfred Basch zum 70. Geburtstag. (Persönliches.) S. 329.
- , Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Von L. Vietoris, bearbeitet von G. Lochs. (Buchbesprechung.) S. 75.
- , Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Von L. Collatz. (Buchbesprechung.) S. 273.
- , Vektor- und Dyadenrechnung für Physiker und Techniker. Von E. Lohr. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 428.
- Geiringer, Hilda, Das allgemeine ebene Problem des ideal-plastischen isotropen Körpers. S. 299.
- Gilli, P., Dampferzeugung. Von M. Ledinegg. (Buchbesprechung.) S. 327.
- Girkmann, K. und E. Tungl, Zum Anschluß von Stäben mit Winkelquerschnitt. S. 255.
- , Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Von K. Federhofer. I., II. und III. Teil. (Buchbesprechung.) S. 274.
- , Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Von K. Federhofer. (Buchbesprechung.) S. 326.
- Glaser, W. und H. Grumm, Die Aberrationskonstanten des elektronenoptischen Abbildungssystems ohne Blende. S. 360.
- Grumm, H., s. Glaser, W.
- Gutmann, V., s. Vitovec, F.
- Haberl, H., Mathematical Engineering Analysis. Von R. Oldenburger. (Buchbesprechung.) S. 142.
- Heinrich, G., s. Czitary, E.
- , Die Mißweisungen des künstlichen Kreiselhorizontes nach Fleuriais. S. 113.
- , Lehrbuch der Technischen Mechanik. Von Th. Pöschl. 2. Band. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 429.
- Herglotz, H., Eine Röntgenröhre mit Durchstrahlanode zur Sekundärerregung von Röntgenspektren. S. 135.
- Hinteregger, H., Drehzahlmessung, Geschwindigkeitsmessung und Durchflußmessung mit Hilfe unipolarer Induktion. S. 93.
- Jäger, K., Ein werkstoffgerechtes Verfahren zur Bemessung von Durchlaufbalken aus Stahlbeton. S. 223.
- , Beton-Kalender 1951. I. und II. Teil. (Buchbesprechung.) S. 66.

- Kneissler, L., Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Von C. Müller. (Buchbesprechung.) S. 141.
- Kogler, E., Engineering Metrology. Von K. J. Hume. (Buchbesprechung.) S. 68.
- Kracmar, F., Scientific Thought in the Twentieth Century. Herausgegeben von A. E. Heath. (Buchbesprechung.) S. 428.
- Krzywoblocki, M. Z. E., Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. A: Subsonic Flow. S. 330.
- Lauer, F., Kraftfahrzeugbremsen. Von A. Pleines. (Buchbesprechung.) S. 71.
- , Verbrennungskraftmaschinen. Von F. A. F. Schmidt. Dritte Auflage. (Buchbesprechung.) S. 430.
- Mache, H., Technische Thermodynamik. Von A. Pischinger. (Buchbesprechung.) S. 71.
- Magyar, F., Einführung in die theoretische Gasdynamik. Von R. Sauer. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 74.
- , Grenzschicht-Theorie. Von H. Schlichting. (Buchbesprechung.) S. 74.
- , Mechanische Schwingungen. Von J. P. den Hartog. Zweite Auflage. (Buchbesprechung.) S. 275.
- Melan, E., Temperaturverteilungen ohne Wärmespannungen. S. 1.
- Mises, R. von, Über einige Grundfragen der Hydrodynamik. S. 77.
- Mudrak, W., Ebene und räumliche Rahmen-tragwerke. Von V. Kupferschmid. (Buchbesprechung.) S. 327.
- Müller, W., Zur Theorie des Reibungsstoßes einer Kugel gegen eine ebene Wand und gegen eine zweite Kugel. S. 196.
- , Zur Theorie der durchlaufenden Fundament-platten und Pilzdecken mit rechteckigen Last- oder Stützflächen. S. 404.
- Müllner, J., Die Evolventenzahnform der Stirnräder mit geraden Zähnen. Von C. Mehl. (Buchbesprechung.) S. 70.
- Parkus, H., Die Grundgleichungen der all-gemeinen Zylinderschale. S. 30.
- , Elementary Theory of Structures. Von J. C. Grassie. (Buchbesprechung.) S. 67.
- Peczar, L., Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von H. Watzlawek. (Buchbesprechung.) S. 276.
- Peters, K., Hilfsbuch für Mineralöltechniker. Von A. F. Orlicek und H. Pöll. 1. Band. (Buchbesprechung.) S. 70.
- Petritsch, E. F., Dielectric Breakdown of Solids. Von S. Whitehead. (Buchbesprechung.) S. 144.
- Pochop, F., Zur Stabilität der langen, in gleichen Abständen querversteiften Rechteckplatte. S. 387.
- Radek, H., Ein Problem verketteter Wahrscheinlichkeiten. S. 208.
- Raher, W., Allgemeine Stabilitätsbedingung für krumme Stäbe. S. 236.
- Richardson, E. G., Turbulence and Silt-Load in Water Channels. S. 86.
- Ritter, F., Corrosion Guide. Von E. Rabald. (Buchbesprechung.) S. 72.
- Rohrer, J., Geodäsie und Photogrammetrie. 1. Teil. Von F. Ackerl. (Buchbesprechung.) S. 64.
- Schaden, K., Die Verdrehungsfestigkeit des Betons. S. 12.
- Schulz, F., An Introduction to the Theory of Control in Mechanical Engineering. Von R. H. Macmillan. (Buchbesprechung.) S. 429.
- Sequenz, H., Der Werdegang eines Ingenieurs. Von E. Rosenberg. (Buchbesprechung.) S. 73.
- , Kurze Zusammenfassung der Elektrizitätslehre. Von P. Cornelius. (Buchbesprechung.) S. 274.
- , Elektromotoren. Von W. Schuisky. (Buchbesprechung.) S. 275.
- Skudrzyk, E., Die innere Reibung und die elastischen Eigenschaften fester, flüssiger und gasförmiger Körper II. S. 157.
- Souccek, E., Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik. Von A. Pröll. (Buchbesprechung.) S. 142.
- Torre, C., Hydrodynamische Theorie fester Stoffe. S. 417.
- Tungl, E., s. Girkmann, K.
- Urban, W., Kühlanlagen. Von O. Göhring. (Buchbesprechung.) S. 67.
- Vitovec, F., Über die Temperaturabhängigkeit der Quersahl der Metalle. S. 132.
- , Über die athermische Plastizität und die Kerbwirkung im Raumgitter. S. 288.
- , The Structure and Mechanical Properties of Metals. Von B. Chalmers. (Buchbesprechung.) S. 66.
- , The Mathematical Theory of Plasticity. Von R. Hill. (Buchbesprechung.) S. 68.
- , Creep of Metals. Von L. A. Rotherham. (Buchbesprechung.) S. 73.
- und V. Gutmann, Adhesion and Adhesives. Herausgegeben von N. A. de Bruyne und R. Houwink. (Buchbesprechung.) S. 140.
- Watzlawek, H., Die Bineutronen-Perioden der Reinelemente. II. Teil. S. 126.
- Wunderlich, W., Geometrische Grundlagen für das Fräsen von Schraubnuten I. S. 315.
- , General Homogeneous Coordinates in Space of Three Dimensions. Von E. A. Maxwell. (Buchbesprechung.) S. 69.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Soeben erschienen:

Technische Elektrodynamik. Von Franz Ollendorff, Dr.-Ing., Dipl.-Ing., Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa, Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel.

Erster Band: **Berechnung magnetischer Felder.** Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. Lex.-8°. 1952. Ganzleinen S 330.—, DM 66.—, \$ 15.70, sfr. 67.50

Das Buch setzt die Kenntnis der theoretischen Grundlagen des Gebietes, vor allem der Faraday-Maxwell'schen Feldtheorie, voraus. Davon ausgehend behandelt der Verfasser die mannigfachsten, besonders den Konstrukteur interessierenden Fragen, wobei sowohl die technische Bedeutung der einzelnen Probleme als auch die Systematik des jeweils anzuwendenden Lösungsganges eingehend berücksichtigt werden. Die Feldberechnungen von Synchron- und Asynchronmaschinen, die Streuungstheorie der Autotransformatoren, die Ermittlung der Zugkräfte von Spaltpolssystemen, Spannplatten und magnetischen Abscheidern sowie die Ansätze zur quantitativen Beschreibung gewisser Meßwerke, die zu einem wesentlichen Teil hier erstmalig behandelt werden, demonstrieren die Leistungsfähigkeiten der rechnerischen Methoden. Als analytische Hilfsmittel wurden grundsätzlich nur solche Funktionen eingeführt, deren Zahlenwerte durch Tabellenwerke leicht zugänglich sind.

Das Gesamtwerk wird etwa 6 Bände umfassen. Als nächster Band wird erscheinen: „Innere Elektronik“, Teil 1: Elektronik des Einzelelektrons; Teil 2: Elektronik von Kollektiven. Jeder Band ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich.

Grundlagen der Elektronenoptik. Von Dr. Walter Glaser, o. Professor an der Technischen Hochschule Wien. Mit 445 Textabbildungen. X, 699 Seiten. Lex.-8°. 1952.

Ganzleinen S 600.—, DM 120.—, \$ 28.60, sfr. 124.—

Das Buch vermittelt in lehrbuchmäßiger Darstellung die theoretischen Grundlagen der Elektronenoptik. Obwohl keine besonderen Kenntnisse des Lesers vorausgesetzt werden, reicht das Buch bis zu den letzten Ergebnissen auf diesem Gebiet. Es kann daher in gleicher Weise dem Studenten als Einführung und dem Spezialisten als Nachschlagewerk dienen. Auch der selbständig Forschende wird verschiedene Anregungen finden.

Gasdynamik. Von Dr. Klaus Oswatitsch, Dozent an der Königl. Technischen Hochschule in Stockholm, früherer wissenschaftlicher Mitarbeiter am Kaiser Wilhelm-(Max Planck-) Institut für Strömungsforschung in Göttingen. Mit 300 Textabbildungen und 3 Tafeln. XIII, 456 Seiten. Lex.-8°. 1952. Ganzleinen S 390.—, DM 78.—, \$ 18.60, sfr. 80.—

Der Verfasser, ein langjähriger Mitarbeiter Prof. Prandtl's, gibt einen Gesamtüberblick über die heutige Gasdynamik, wobei er das Hauptgewicht nicht auf eine Wiedergabe der mathematischen Probleme, sondern auf eine anschauliche Behandlung der physikalischen und technischen Fragen legt. Die einzelnen Problemkreise werden in ihren wesentlichen Punkten behandelt und die Ergebnisse meist an einem typischen Beispiel gezeigt, das mit Versuchen verglichen wird. Der Leser kommt so am besten in die Lage, sich die prinzipielle Methodik der Behandlung aller einschlägigen Aufgaben selbst anzueignen. Tabellen und Diagramme sind als praktische Rechengrundlagen beigelegt. Die Art der Darstellung sowie eine Reihe eigener Beiträge des Verfassers verleihen dem Buch seine besondere Note.

Die Herstellung von Sägeblättern für Holz. Eine Betriebsführung für Sägewerker und andere Sägenfachleute. Von Dr.-Ing. Eugen Wüster, Wieselburg/Erlauf (Niederösterreich). Mit 38 Textabbildungen. XV, 257 Seiten. DIN A 5. 1952.

Steif geheftet S 96.—, DM 19.20, \$ 4.60, sfr. 19.80

So reich die Literatur über Form und Handhabung von Sägen ist, so gibt es doch bisher kein Buch, das über die nicht ohne weiteres erkennbaren Gütemerkmale der Holzsägen unterrichtet. Mit dem angekündigten Werk des Leiters einer der ältesten und größten Sägenfabriken wird diese Lücke beseitigt. Der Sägewerker und jeder Holzfachmann erhält darin erschöpfend Auskunft über den Werdegang der verschiedenen Arten von Holzsägen. Darüber hinaus stellt der Verfasser sein Buch in den Dienst der neuzeitlichen Bestrebungen, durch internationalen Erfahrungsaustausch die Holzsägen zu verbessern und zu verbilligen, und berichtet über die Ergebnisse dieser Bestrebungen.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Soeben erschienen:

Der Grundbau. Handbuch für Studium und Praxis. Von Dipl.-Ing. Dr. techn. Dr.-Ing. h. c. **Armin Schoklitsch**, Professor der Universidad Nacional de San Miguel de Tucumán, Argentinien. Zweite, neubearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 782 Abbildungen und 43 Zahlentafeln. XII, 457 Seiten. 4°. 1952. Ganzleinen S 435.—, DM 87.—, \$ 20.70, sfr. 89.—

Das sowohl als Studienbehelf als auch als Nachschlagewerk für den in der Praxis stehenden Ingenieur gedachte Buch ist längst zum Standardwerk auf dem Gebiete des Grundbaues geworden. Die nunmehr erscheinende zweite Auflage hat an der bewährten Anordnung des Stoffes festgehalten, aber alle Neuerungen der letzten Jahre berücksichtigt. Eine besondere Erweiterung haben die Kapitel über die Methoden der Bodenuntersuchung und über den Erddruck (Baugrubenaussteifungen) erfahren.

Die Hochspannungs-Freileitungen. Von Dr. Ing. **Karl Girkmann**, o. Professor an der Technischen Hochschule in Wien, und Dr. Ing. **Erwin Königshofer**, Obering. der Österreichischen Elektrizitätswirtschafts-A. G. (Verbundgesellschaft) in Wien. Zweite, erweiterte Auflage. Mit 592 Abbildungen im Text und 124 Zahlentafeln. XV, 655 Seiten. Lex.-8°. 1952. Ganzleinen S 470.—, DM 94.—, \$ 22.40, sfr. 96.—

Die zweite Auflage des bekannten Buches wurde dem neuesten Stand der Technik des Freileitungsbaues angepaßt und durch die Schilderung der Praxis des Auslandes erweitert. Dies bezieht sich sowohl auf die Ausrüstungsteile und die elektrische Festigkeit als auch auf die Ausführung der Maste und ihrer Fundierung, wobei die neu entwickelten Bauformen und Herstellungsweisen samt den zugehörigen Berechnungen berücksichtigt sind. Ein neu hinzugekommener Abschnitt behandelt an Hand konkreter Zahlenbeispiele die Lösung von Aufgaben der Großkraftübertragung.

Mineralogie für Ingenieure des Tief- und Hochbaues und der Kulturtechnik. Von Dr. **Josef Stini**, Wien. Mit 78 Textabbildungen. VII, 121 Seiten. 1952. Steif geheftet S 60.—, DM 12.—, \$ 2.90, sfr. 12.50

Der als Ingenieur bekannte Verfasser hat sich die Aufgabe gestellt, den Baumeistern und Tiefbauingenieuren mit diesem Buch eine Anleitung zu geben, wie sie die Mineralien, die ihre Bausteine zusammensetzen, technisch beurteilen können. Das rein auf die Bedürfnisse des Bauschaffenden abgestellte Buch ist kein mineralogisches Lehrbuch im gewöhnlichen Sinn, sondern setzt im Gegenteil gewisse Kenntnisse etwa im Ausmaß des Mittelschullehrstoffes voraus. Dafür ist mit Absicht alles weggelassen, was ausschließlich von theoretisch-wissenschaftlichem Interesse ist.

Das Großspeicherwerk Glockner-Kaprun. Entwurf und Bauausführung 1938 bis 1945. Von Prof. Dr. **Hermann Grengg**, Graz. Mit 10 Textabbildungen. V, 35 Seiten. DIN A 5. 1952. (Heft 23 der „Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes“.) Steif geheftet S 14.—, DM 2.80, \$ —.70, sfr. 3.—

Amerikanischer Talsperrenbau. Von Dipl.-Ing. Dr. **Josef Fritsch**, Wien. Mit 22 Textabbildungen. III, 51 Seiten. DIN A 5. 1952. (Heft 24 der „Schriftenreihe des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes“.) Steif geheftet S 14.—, DM 2.80, \$ —.70, sfr. 3.—

Ab Januar 1953 erscheint „Maschinenbau und Wärmewirtschaft“ erweitert als

Maschinenbau und Wärmewirtschaft vereinigt mit Betrieb und Fertigung, Lokomotiv- und Fahrzeugbau. Organ der Versuchs- und Forschungsanstalt für Wärme-, Kälte- und Strömungstechnik, Wien, und der Technischen Versuchs- und Forschungsanstalt der Technischen Hochschule Wien. Schriftleitung: **C. Kümmerer**, Wien, **A. Slattenschek**, Wien, **K. Pflanz**, Wien. Jährlich erscheinen 12 Hefte. (1953: 8. Jahrgang.) Halbjährlich S 96.—, DM 20.—, \$ 4.80, sfr. 20.60

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria